

Z 802



BERICHTE
AUS DEM
INSTITUT FÜR MEERESKUNDE
AN DER
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT KIEL

NR. 85

DIE EIGENSCHWINGUNGEN ABGESCHLOSSENER, ZWEIGESCHICHTETER
WASSERBECKEN BEI VARIABLER BODENTOPOGRAPHIE

VON

ERICH BÄUERLE

DOI 10.3289/IFM-BER-85

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:
Institut für Meereskunde an der Universität Kiel
Abt. Theoretische Ozeanographie
23/Kiel
Düsternbrooker Weg 20

ISSN 0341-8561

Zusammenfassung

Es wird ein numerisches Verfahren entwickelt, mit dem es möglich ist, die internen Eigenschwingungen aus rotierenden abgeschlossenen zweigeschichteten Wasserbecken bei variabler Bodentopographie zu berechnen. Die Frequenzen und die Struktur der Eigenvektoren der freien internen Schwingungen eines Zweischichten-Modells des Bodensees bei konstanter Äquivalenztiefe werden bei unterschiedlichen Rotationsgeschwindigkeiten bestimmt. Die internen Querschwingungen des Überlinger Sees werden mit einer Reihe von Modellen untersucht, und es zeigt sich, daß die Struktur der Grundschiwingung wesentlich durch die veränderliche Bodentopographie und durch den abschließenden Rand beeinflusst wird.

Summary

A numerical procedure is used to develop a method for the evaluation of the internal free modes of oscillation in a two-layered rotating closed basin with topography.

Frequencies and model structures of free internal oscillations in a two-layer model of Lake Constance assuming a uniform equivalent depth are calculated for various rotation rates.

Transverse internal seiches in various models of Lake Überlingen are studied. One can see that topographic effects and the presence of end walls are important for the structure of the fundamental mode.

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG	1
I. DIE AUSGANGSGLEICHUNGEN FÜR EIN ZWEIFESCHICHTETES MEDIUM	7
I.1 Das Zweischichten-Modell	7
I.2 Die Eigenschwingungen des zweigeschichteten Beckens	12
I.3 Trennung der Bewegung in barotrope und barokline vertikale Eigenfunktion	13
II. DIE NUMERISCHE BEHANDLUNG DER GLEICHUNGEN	17
II.1 Die Diskretisierung der Gleichungen	17
II.2 Der Lösungsalgorithmus	25
III. TESTRECHNUNGEN	29
III.1 Rechteckige Becken bei ebenem Boden	29
III.1.1 Rotationsfreier, barotroper Fall	29
III.1.2 Barotropes (2x1)-Rechteck bei Erdrotation	31
III.1.3 Zweigeschichtetes (5x1)-Rechteck	32
III.1.3.1 Entkoppeltes Modell	32
III.1.3.2 Gekoppeltes Modell	34
III.2 Eigenfunktionen eines zweigeschichteten (5x1)-Rechtecks mit parabolischem Boden	35
III.3 Becken mit unregelmäßiger Berandung (Bodensee mit Rao-Gitter)	38
III.3.1 Vernachlässigung des Einflusses der Erdrotation ($f=0$)	39
III.3.2 Der Einfluß der Erdrotation ($f \neq 0$)	42
IV. BAROKLINE EIGENSCHWINGUNGEN DES BODENSEES	44
IV.1 Konstante Äquivalenztiefe	46
IV.2 Berücksichtigung der Bodentopographie	53

V.	INTERNE QUERSCHWINGUNGEN DES ÜBERLINGER SEES	55
V.1	Die beschreibenden Gleichungen für den unendlich langen Kanal	56
V.1.1	Die vollständigen Gleichungen	56
V.1.2	Die Trennung von barotroper und barokliner Bewegung beim unendlich langen Kanal	60
V.1.3	Analytische Lösungen für den Fall konstanter Äquivalenztiefe	62
V.2	Ergebnisse für den Überlinger See als unendlich langer Kanal	63
V.2.1	Konstante Äquivalenztiefe	65
V.2.2	Variabler Boden, $H=H(y)$	66
V.3	Ein Vergleich mit Beobachtungen	67
V.4	Die internen Querschwingungen des Überlinger Sees bei Berücksichtigung von Effekten, die vom Ende des Sees ausgehen	70
	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	73
	DANKSAGUNG	77
	LITERATURVERZEICHNIS	78

EINLEITUNG



Die freien Schwingungen abgeschlossener Wasserbecken sind ein Phänomen, das sich bei genauer Beobachtung in jedem See oder Weiher nachweisen läßt. Am Genfer See, wo die rhythmischen Änderungen des Standes des Seespiegels Amplituden von mehreren Dezimetern haben können, sind es diese Auslenkungen der Wasseroberfläche, die am augenfälligsten sind und den Anwohnern seit Jahrhunderten unter dem Namen "seiches" bekannt sind. Die horizontalen Strömungen, die selbst bei so großen Amplituden maximal auftreten können, sind nicht größer als 2-3 cm in der Sekunde und entziehen sich von daher der Beobachtung mit bloßem Auge. Da am Bodensee die durch die freien Schwingungen bewirkten Höhenunterschiede im Wasserstand in der Regel nur wenige Zentimeter sind, bleibt den Bodensee-Anwohnern das Phänomen der Oberflächen-Seiches verborgen, es sei denn, es treten ganz außergewöhnliche Ereignisse ein, wie das von dem Chronisten Schulthaiss (1549) beschriebene "Wunder anloffen des wassers" bei Konstanz, das von Hollan et al (1980) als resonant angeregte Grundschwingung der Bucht von Konstanz erklärt wird.

Im Gegensatz zu den Oberflächen-Seiches weisen die mit den internen Seiches verbundenen Strömungen erhebliche Amplituden auf. Sehr anschaulich beschrieben wird dies vom deutschen Übersetzer einer Arbeit von Forel (1893), Eberhard Graf Zeppelin, der in seiner "Vorbemerkung des Übersetzers" schreibt: ".... Unter dem Wort "Rinnen" verstehen die Schiffer und Fischer am Bodensee die in stärkerem oder schwächerem Maasse fast ununterbrochen wahrnehmbare Strömung des See-Wassers, vermöge deren das letztere, ohne etwa irgendwie durch Wind getrieben zu sein, flussähnlich einmal nach dieser und das anderemal nach jener Richtung der Windrose zu fließen (bezw. also zu "rinnen") scheint. Die Fischer tragen dieser Strömung Rechnung, indem sie, um eines grösseren Fanges der von ihr mitgenommenen Fische sicher zu sein, ihre Netze quer gegen dieselbe auswerfen. Den Schiffen dagegen, insbesondere auch den Dampfschiff-Führern beim Anlegen an die vielfach weit in den See hinausgebauten Landungsbrücken, macht sich dieses Rinnen dadurch oft recht merklich fühlbar, dass es, das Schiff (zuweilen wohl auch

nur dessen Vorder- oder Hinterteil) erfassend, dasselbe abtreibt und die Landung erschwert, wenn es verabsäumt wird, das Schiff möglichst rasch anzubinden....".

Diese horizontalen Wasserbewegungen mögen für den Fischer von untergeordneter Bedeutung sein, wenn durch sie die mögliche Fülle seiner Netze keine Beeinträchtigung erfährt. Für den messenden Planktologen wirft dieses "Vorbeirauschen" oder "Rinnen" der Wassermassen ein außerordentlich schwer zu lösendes Problem bei Untersuchungen über die Phytoplanktonentwicklung auf. Die an einer Stelle des Sees gemessenen Schwankungen in den täglich (oder auch mehrstündlich) gewonnenen Ergebnissen einer Probenahme (Geller, p.M.) werden in den seltensten Fällen die tatsächliche Biomassenveränderung darstellen und sind auch nicht durch die "patchiness" der Planktonverteilung zu erklären. Vielmehr wird man die beobachteten Biomassenschwankungen an einem bestimmten Probenahmepunkt stets mit direkt windgetriebenen Horizontalwasserbewegungen oder mit internen Seiches in Beziehung setzen müssen.

Für den Wasserbauingenieur ist es wichtig, zu wissen, wie sich künstliche Einleitungen (Abwasser) im Küstenbereich verhalten. Dabei hat er drei Situationen zu unterscheiden: Während Perioden langanhaltender, küstenparalleler Strömung ist die Dispersion ins Innere des Sees relativ schwach, aber der Küstenbereich in Strömungsrichtung wird in Mitleidenschaft gezogen. Während Perioden schwacher oder verschwindender küstenparalleler Strömung wird sich vor der Einleitungsstelle eine Wolke hoher Konzentration an eingeleitetem Schadstoff ausbilden. Während Perioden von oftmaliger Stromumkehr ist die Dispersion zum Seeinneren hin sehr groß. Murthy (1972) zeigt, daß der turbulente Diffusionskoeffizient bei wechselnden Strömungen sich um einiges größer als bei gleichbleibend gerichteter Strömung ergibt. In diesem Zusammenhang gewinnt die Kenntnis der horizontalen Amplitudenverteilung der (sich ständig umkehrenden) Strömungen, die mit den freien internen Schwingungen eines Sees einhergehen, erhebliche Bedeutung.

Neben diesen Horizontalversetzungen der Wassermassen sind mit den internen Seiches auch Vertikalverlagerungen von beträchtlichem Ausmaß verbunden. Die Grenzschicht zwischen warmem Deckschichtwasser und kaltem Unterschichtwasser er-

führt Auslenkungen von 10 m und mehr. Da der Bodensee inzwischen als Trinkwasserreservoir für über 100 Städte und Gemeinden mit 2,5 Millionen Menschen genutzt wird und von den rund 20 Entnahmestellen einige in nur 30 m Tiefe angelegt sind, ist eine Kenntnis der periodischen vertikalen Schwankungen der Sprungschicht um ihre mittlere Tiefenlage (die im Spätsommer nur wenig höher als 30 m liegt) von großem Interesse. Die Bedeutung dieser Vertikalversetzungen der Sprungschicht wird offenbar, wenn man bedenkt, daß viele der eingeleiteten Stoffe, die allenthalben in den See gelangen, aufgrund der Temperatur der sie befördernden Wassermasse sich im Tiefenniveau der Sprungschicht einschichten.

Trotz der enormen Bedeutung für die Anwohner des Sees sind wissenschaftliche Untersuchungen über die interne Dynamik des sommerlich geschichteten Bodensees bis vor wenigen Jahren nur sehr vereinzelt und ohne die notwendige instrumentelle Ausrüstung vorgenommen worden. So bedeutet die Bodensee-Expedition, die 1972 unter der Leitung von E. Hollan mit einem kompakten Einsatz von ozeanographischen Meßgeräten durchgeführt wurde (siehe dazu Hollan (1974)) einen drastischen Wandel in der physikalischen Limnologie des Bodensees. Abb.E.1 zeigt die Lage der Verankerungen im Strömungsmeßprogramm 1972.

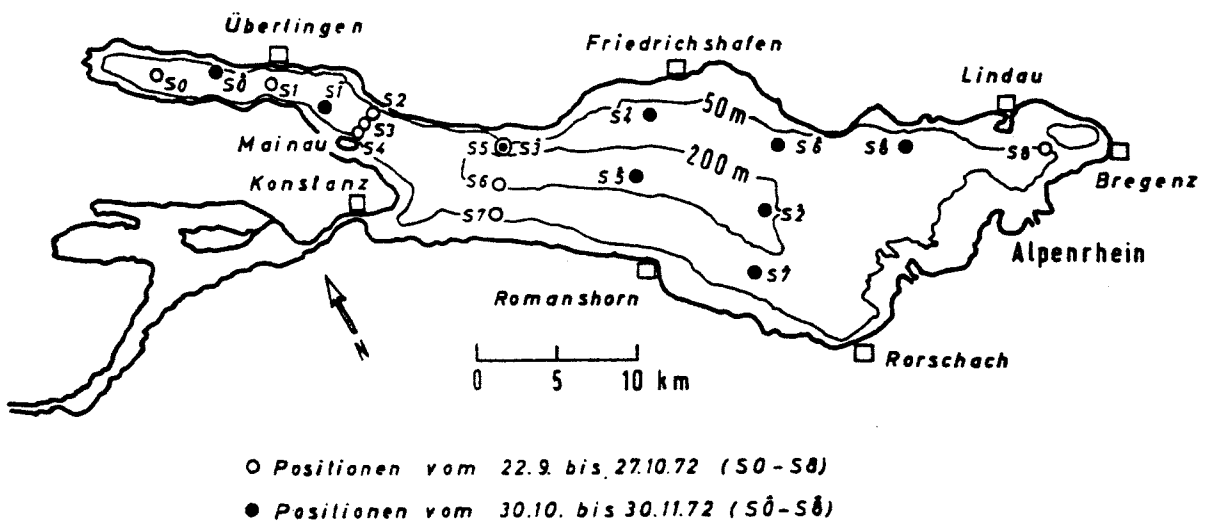


Abb.E.1 Lageplan der Meßkettenverankerungen im Strömungsmeßprogramm 1972. Aus Hollan (1974).

Mit dieser groß angelegten Meßaktion wurde nicht nur ein bedeutender Schritt auf dem Sektor der meßtechnischen Untersuchung der hydrodynamischen Vorgänge im Bodensee gemacht, durch das vorgelegte Beobachtungsmaterial wurde auch der Hintergrund geschaffen für eine vergleichende Anwendung der analytischen und numerischen Lösungsmethoden der Hydrodynamik.

Bei den eingangs in ihren Auswirkungen bzw. Erscheinungsformen beschriebenen freien Schwingungen handelt es sich um stehende Schwerewellen (Schwingungen der 1. Art), die aus Schwankungen der Oberfläche (oder auch interner Grenzflächen) um ihre Gleichgewichtslage bestehen. Die rücktreibende Kraft ist die Schwerkraft. Die Erdrotation hat nur einen modifizierenden Einfluß auf die Eigenschaften dieser Art von freien Schwingungen.

Schwingungen 2. Art (rotational modes), die als zweiter Typ von freien Schwingungen eines Wasserkörpers auf einer rotierenden Ebene auftreten können, sind niederfrequente Schwingungen mit $\omega < f$. Ihr Auftreten hängt ab von der Existenz eines Gradienten der potentiellen Vorticity, der entweder durch die Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters oder, für eine homogene Wassermasse, durch Tiefenveränderlichkeiten des Beckens hervorgerufen sein kann.

Die Versuche, analytische Lösungen für das Problem der freien Schwingungen zu finden, mußten auf Wasserbecken von idealisierter Gestalt (kreisförmige, elliptische oder rechteckige Becken) beschränkt bleiben, da nur solche einfache Beckenformen die analytische Behandlung der dynamischen Gleichungen und geschlossene Lösungen zulassen (siehe dazu den historischen Überblick bei Rao (1966)). Berücksichtigt man auch den Einfluß der Erdrotation, so wird schon die Berechnung der freien Schwingungen eines rechteckigen Beckens mit konstanter Tiefe ein recht kompliziertes mathematisches Unterfangen (Rao 1966). Es ist naheliegend, daß bei natürlichen Wasserbecken mit beliebiger Rand- und Bodenkonfiguration die mathematischen Schwierigkeiten durch ein analytisches Verfahren nicht mehr lösbar sind.

Die klassische Kanaltheorie, die (bei Vernachlässigung der Erdrotation) durch Mittelung der Gleichungen in Querrichtung das Problem auf ein eindimensionales reduziert, führt bei

vielen natürlichen Becken, wenn sie schmal und langgestreckt sind, auf zufriedenstellende Ergebnisse (siehe dazu Defant (1960) oder - für den Bodensee - Hollan et al (1980)). Für größere Seen, bei denen die Struktur der freien Schwingungen durch die Erdrotation bestimmt ist, erhält man Systeme von Amphidromien, die nur für die niederen Schwingungsordnungen - unter Hinzunahme von Kelvinwellen zu den Lösungen der Kanaltheorie - nachvollziehbar sind (Defant 1954, Platzman and Rao 1964). Für höhere Ordnungen und im Uhrzeigersinn drehende Amphidromien ist die Kanaltheorie ohne Wert.

Ein von Proudman (1916) entwickeltes analytisches Verfahren zur Bestimmung der zweidimensionalen freien Schwingungen eines homogenen Wasserbeckens benutzt Rao (1966) zur Untersuchung der freien Schwingungen eines rotierenden, rechteckigen Beckens. Eine Erweiterung dieses Verfahrens (Rao and Schwab 1976) ermöglicht durch den Gebrauch von räumlichen Differenzenquotienten die Behandlung natürlicher Becken mit beliebiger Bodentopographie und beliebiger Randkonfiguration. Bei Nichtberücksichtigung der Erdrotation ist eine vereinfachte Version dieser allgemeinen Theorie anwendbar und wurde zur Berechnung der ersten Ordnungen der Oberflächenseiches des Bodensees herangezogen (Hollan et al 1980).

Bei ebenem Boden besteht die Möglichkeit einer Separation der Bewegung in einen barotropen Anteil und einen baroklinen Anteil, wobei letzterer charakterisiert ist durch nahezu gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Volumentransporte in der Deckschicht bzw. der Unterschicht. Die Gleichungen für die so erhaltene barokline Bewegung sind völlig äquivalent zu den Gleichungen, die für die barotropen Schwingungen gültig sind, wenn man nur die Schwerkraft durch einen reduzierten Wert und die Gesamtwassertiefe durch eine Äquivalenztiefe ersetzt. Damit besteht die Möglichkeit, die freien Schwingungen von zweigeschichteten Becken mit den gleichen Verfahren wie die bei homogenen Wasserbecken angewandten zu behandeln. Rao (1977) macht dies mit einem semi-analytischen Verfahren für zweigeschichtete rechteckige Becken, Schwab (1977) berechnet die freien internen Eigenschwingungen eines Zweischichten-Modells des Ontario-Sees.

Auch die Ergebnisse, die Kanari (1975) für den zweigeschichteten Lake Biwa erhält, basieren auf der Separation von

barotroper und barokliner vertikaler Eigenfunktion und sind demnach bei ebenem Boden berechnet. Im Gegensatz zu den bisher erwähnten Verfahren werden hier zunächst Zeitreihen der windbedingten Strömung und der Auslenkungen der Grenzfläche berechnet und aus diesen vermittels Fourieranalyse die Perioden der freien Schwingungen bestimmt.

Der einzige mir bekannte Versuch, die internen Seiches eines Sees bei variabler Bodentopographie zu berechnen, wird von Hamblin (1978) unternommen. Dabei beschränkt sich Hamblin aber auf die Betrachtung der niederfrequenten Kelvinwellen, für die die Annahme gerechtfertigt erscheint, daß die Strömung hauptsächlich parallel zu den Tiefenlinien verläuft (Wang and Mooers 1976) und damit eine Separation von Vertikal- und Horizontalbewegung möglich ist. Diese Entkopplung ist nicht möglich, wenn aufgrund einer Strömung quer zu den Tiefenlinien eine Vertikalkomponente der Strömung hervorgerufen wird. Bei internen Schwingungen, deren Perioden in der Nähe der Trägheitsperiode liegen (Poincaré-Wellen) sind die beiden Komponenten quer bzw. parallel zu den Tiefenlinien nahezu gleich groß und damit sind diese Schwingungen durch die Hamblinsche Betrachtungsweise nicht erfaßbar.

Es ist also festzustellen, daß es bis heute an einem geeigneten Verfahren fehlt, das eine Behandlung der internen Eigenschwingungen erlaubt, ohne daß tiefgreifende Einschränkungen (wie ebener Boden oder Strömung parallel der Tiefenlinien) vorgenommen werden müssen. In der vorliegenden Arbeit wird ein mathematisch einfaches Verfahren vorgestellt, das die für die freien Schwingungen mehrfach geschichteter Wasserbecken gültigen Differenzgleichungen in ihrer vollständigen Form löst, das heißt, die Kopplung zwischen barotroper und barokliner Bewegung aufgrund variabler Bodentopographie berücksichtigt. Damit besteht auch die Möglichkeit, verschiedene Approximationen, die bisher unternommen wurden, um das Problem der Separierbarkeit bei variablem Boden zu umgehen, auf ihre Stichhaltigkeit zu überprüfen.

I. DIE AUSGANGSGLEICHUNGEN FÜR EIN ZWEIFESCHICHTETES MEDIUM

I.1 Das Zweischichten-Modell

Ein Vertikalprofil der mittleren Dichte $\bar{\rho}_0(z)$, das typisch für die Verhältnisse im Herbst 1972 im Überlinger See ist, zeigt die Abbildung I.1. Die Temperatur einer gut durchmischten Schicht, die bis unterhalb 20 m Tiefe reicht, ändert sich innerhalb weniger Meter auf bedeutend niedrigere Werte. Unterhalb dieser Tiefenlage mit großen Vertikalgradienten geht die Temperatur allmählich über zu den Werten des tiefen Sees. Die herbstliche Auskühlung bewirkt bei ruhigen Wetterlagen zwar eine Abnahme der Deckschichttemperatur, beläßt aber die Sprungschicht in ihrer Lage (siehe dazu Hollan 1974).

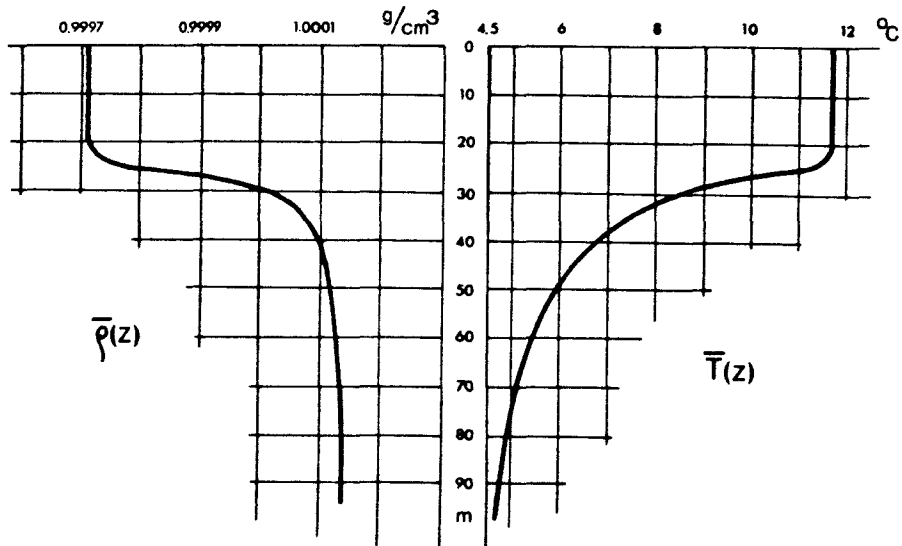


Abb.I.1 Typische Vertikalprofile $\bar{\rho}(z)$ und $\bar{T}(z)$ Mitte Oktober 1972 im Überlinger See. Die Zustandsgleichung für Süßwasser wird nach Simons (1972) durch die Form $\rho_0(z) = \rho_1 - \alpha(T - T_1)^2$ approximiert. Der thermische Ausdehnungskoeffizient wird zu $\alpha = 7.3_{10} \cdot 10^{-6} \text{ Grad}^{-2}$ bestimmt (nach Selenka und Ruschke (1965)), T_1 ist die Temperatur des Dichtemaximums (4°C) und ρ_1 ist die Dichte bei 4°C .

Ein einfaches Modell für eine derartige Dichteschichtung ist durch die mittlere Dichteverteilung gemäß

$$\bar{\rho}_0(z) = \begin{cases} \rho_1 & \text{für } 0 \leq z < h_1 \\ \rho_2 & \text{für } h_1 \leq z \leq H(x,y) \end{cases}$$

gegeben. Für ein Medium, das sich solchermaßen aus zwei

Schichten verschiedener Dichte, einer durchmischten Deckschicht der konstanten Dichte ρ_1 über einer durchmischten Unterschicht mit der Dichte ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), zusammensetzt, können die linearisierten Gleichungen für die f-Ebene (oder auch die β -Ebene), mit denen Bewegungen kleiner Amplituden um einen hydrostatischen Gleichgewichtszustand beschrieben werden (siehe LeBlond and Mysak (1978), Seite 119), als gültig angesehen werden. Setzt man darüber hinaus für ein zweigeschichtetes Medium die Gültigkeit der Gleichungen für lange Wellen voraus (und damit die z-Unabhängigkeit der Horizontalgeschwindigkeit in jeder der beiden Schichten), dann lauten die Bewegungsgleichungen für die Deckschicht

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + f v_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad , \quad (I.2a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - f u_1 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} \quad , \quad (I.2b)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \rho_1 g \quad , \quad (I.2c)$$

und für die Unterschicht

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + f v_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \quad , \quad (I.3a)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - f u_2 = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial y} \quad , \quad (I.3b)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = \rho_2 g \quad . \quad (I.3c)$$

Dabei sind $u_{1,2}$, $v_{1,2}$, $p_{1,2}$ die Komponenten der Horizontalgeschwindigkeit und der Druck in der Deckschicht bzw. in der Unterschicht, f ist der Coriolisparameter und g die Schwerebeschleunigung.

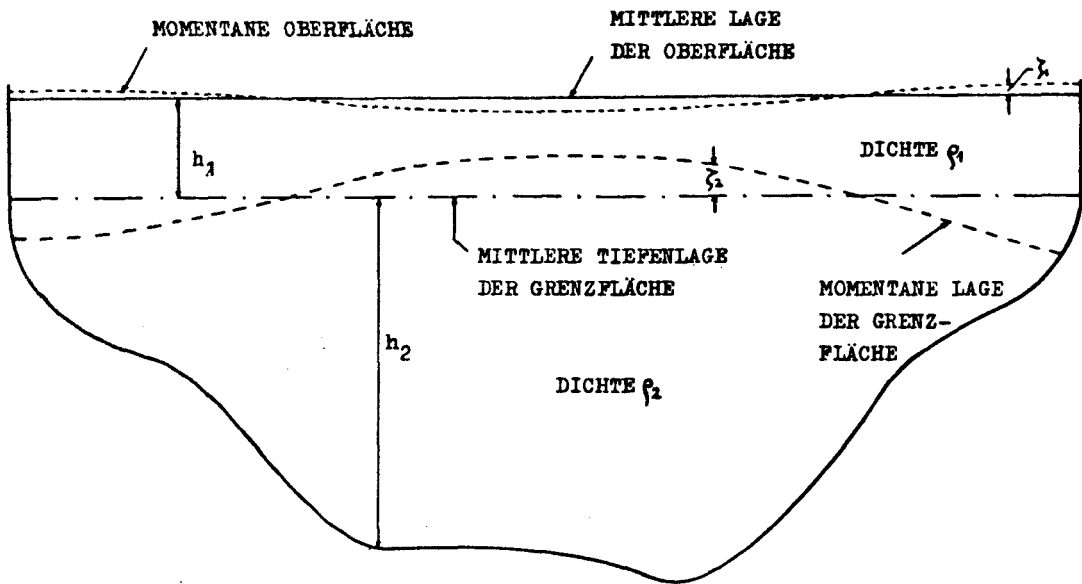


Abb.I.2 Zweischichten-Modell eines sommerlich geschichteten Sees

Durch Integration ergibt sich aus (I.2c) für die Deckschicht $(-\zeta_1 \leq z \leq h_1 - \zeta_2)$

$$p_1 = p_a + g\rho_1(\zeta_1 + z) \quad (I.4a)$$

und für die Unterschicht $(h_1 - \zeta_2 \leq z \leq H)$

$$p_2 = p_a + g\rho_1(\zeta_1 + h_1 - \zeta_2) + g\rho_2(\zeta_2 + z - h_1) \quad , \quad (I.4b)$$

wobei der Atmosphärendruck p_a für freie Bewegungen als konstant anzusehen ist. Die Bedeutung der Variablen ist der Abb.I.2 zu entnehmen. Die Beziehungen (I.4a) und (I.4b) ermöglichen die Elimination von p_1 und p_2 in den Bewegungsgleichungen, die somit nach Vertikalintegration über die jeweilige Schicht lauten

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + fV_1 + gh_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 0 \quad , \quad (I.5a)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} - fU_1 + gh_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = 0 \quad , \quad (I.5b)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + fV_1 + g\delta h_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} + g\epsilon h_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0 \quad , \quad (I.6a)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - fU_1 + g\delta h_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + g\epsilon h_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0 \quad . \quad (I.6b)$$

Dabei sind $U_1 = \int_0^{h_1} u_1 dz$, $V_1 = \int_0^{h_1} v_1 dz$, $U_2 = \int_{h_1}^{h_2} u_2 dz$, $V_2 = \int_{h_1}^{h_2} v_2 dz$

die Komponenten des horizontalen Volumentransports der jeweiligen Schicht in x- und y-Richtung, und es wurde $\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$ und $\delta = \rho/\rho_1$ gesetzt.

Die Kontinuitätsgleichungen für die beiden Schichten lauten

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad (I.7a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \quad , \quad (I.7b)$$

und gehen durch Vertikalintegration über die jeweilige Schicht unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$w_1(0) = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \quad , \quad (I.8a)$$

$$w_1(h_1) = w_2(h_1) = -\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \quad , \quad (I.8b)$$

$$w_2(H) = u_2 \frac{\partial H}{\partial x} + v_2 \frac{\partial H}{\partial y} \quad , \quad (I.8c)$$

Über in

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = 0 \quad , \quad (I.9a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = 0 \quad . \quad (I.9b)$$

Addiert man die Kontinuitätsgleichungen (I.9a) und (I.9b), so lassen sich die beschreibenden Gleichungen in Vektorform

folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_1}{\partial t} + f k \times V_1 + g h_1 \nabla \zeta_1 &= 0, \\
 \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \nabla \cdot V_1 + \nabla \cdot V_2 &= 0, \\
 \frac{\partial V_2}{\partial t} + f k \times V_2 + g \delta h_2 \nabla \zeta_1 + g \epsilon h_2 \nabla \zeta_2 &= 0, \\
 \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} + \nabla \cdot V_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{I.9}$$

Für ein abgeschlossenes Wasserbecken sind die Randbedingungen gegeben durch

$$V_1 \cdot n = 0 \quad \text{und} \quad V_2 \cdot n = 0. \tag{I.10}$$

Der Volumentransport der jeweiligen Schicht in Richtung der Normalen zum seitlichen Rand soll also verschwinden.

Das System (I.9) läßt sich in Operatorenschreibweise durch

$$\frac{\partial a}{\partial t} + L a = 0 \tag{I.11}$$

darstellen, wobei

$$a = \begin{pmatrix} V_1(x,y,t) \\ \zeta_1(x,y,t) \\ V_2(x,y,t) \\ \zeta_2(x,y,t) \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} f k \times & g h_1 \nabla & 0 & 0 \\ \nabla \cdot & 0 & \nabla \cdot & 0 \\ 0 & g \delta h_2 \nabla & f k \times & g \epsilon h_2 \nabla \\ 0 & 0 & \nabla \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

In diesen Gleichungen wird die Schichttiefe h_2 als abhängig von den horizontalen Koordinaten angesehen, also $h_2 = h_2(x,y)$. Im weiteren dieser Arbeit werden zwar auch Lösungsverfahren für den Fall konstanter Schichttiefe h_2 behandelt und Fälle spezieller Bodenformen, aber die Essenz der Arbeit ist die Herleitung und Benutzung eines numerischen Verfahrens zur Lösung des Eigenwertproblems eines abgeschlossenen, zweigeschichteten Wasserbeckens beliebiger Randkonfiguration und beliebiger Bodentopographie.

I.2 Die Eigenschwingungen des zweigeschichteten Beckens

Eigenschwingungen sind gekennzeichnet durch ihren sinusoidalen zeitlichen Verlauf und somit darstellbar durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} V_1(x,y,t) \\ \zeta_1(x,y,t) \\ V_2(x,y,t) \\ \zeta_2(x,y,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*(x,y) \\ \zeta_1^*(x,y) \\ V_2^*(x,y) \\ \zeta_2^*(x,y) \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (I.12)$$

Dabei ist ω die Frequenz der Schwingung, $i = \sqrt{-1}$, V_1^* , ζ_1^* , V_2^* und ζ_2^* sind die (komplexen) Amplituden der Horizontalkomponenten des Volumentransports bzw. der Auslenkungen der jeweiligen Schicht. Geht man mit diesem Ansatz in das Gleichungssystem (I.9) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} i\omega V_1^* + f k \times V_1^* + g h_1 \nabla \zeta_1^* &= 0, \\ i\omega \zeta_1^* + \nabla \cdot V_1^* + \nabla \cdot V_2^* &= 0, \\ i\omega V_2^* + f k \times V_2^* + g \delta h_2 \nabla \zeta_1^* + g \epsilon h_2 \nabla \zeta_2^* &= 0, \\ i\omega \zeta_2^* + \nabla \cdot V_2^* &= 0. \end{aligned} \quad (I.13)$$

Die Randbedingungen (I.10) lauten nun

$$V_1^* \cdot n = 0 \quad \text{und} \quad V_2^* \cdot n = 0. \quad (I.14)$$

In Operatorenschreibweise stellt sich das System (I.13) dar durch

$$\begin{aligned} i\omega A + L A &= 0 \\ \text{oder} \quad (i\omega I + L) A &= 0, \end{aligned} \quad (I.15)$$

wobei $A = \begin{pmatrix} V_1^* \\ \zeta_1^* \\ V_2^* \\ \zeta_2^* \end{pmatrix}$ und I die Einheitsmatrix ist. Der Stern wird im weiteren weggelassen; da die folgenden Betrachtungen nur noch im Frequenzbereich erfolgen, ist eine Verwechslung ausgeschlossen.

Die Eigenwerte ω_i des Operators \mathbf{L} in (I.15) sind die (mit $i = \sqrt{-1}$ multiplizierten) Eigenfrequenzen der freien Schwingungen des betrachteten Beckens und die \mathbf{A}_i s sind die dazu gehörigen Eigenvektoren. Jeder Eigenvektor \mathbf{A}_i ist Funktion der horizontalen Koordinaten und gibt die Struktur der Eigenschwingung mit der jeweiligen Frequenz ω_i an.

Im Prinzip existieren zwei unterschiedliche Lösungstypen des Eigenwertproblems (I.15). Die erste Art sind freie, stehende Grenzflächenwellen, die ihre Existenz der rücktreibenden Kraft der Schwerkraft verdanken. Die zweite Art, die nur bei Berücksichtigung der Erdrotation auftreten kann, wird durch die rücktreibende Kraft der räumlichen Änderungen der potentiellen Vorticity π

$$\pi = \frac{\eta + f}{H} \quad , \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \quad ,$$

bewirkt. Im Fall des Bodensees, wo der Coriolisparameter f als räumlich konstant über den ganzen See betrachtet wird, kann sich die potentielle Vorticity nur durch eine variable Bodentopographie ändern. Im Periodenbereich oberhalb der Trägheitsperiode treten denn auch diese Schwingungen 2. Art auf und sind allein aufgrund ihrer Periode nicht von den ersten Ordnungen der internen Seiches zu unterscheiden. Eine Unterscheidung zwischen diesen verschiedenen Lösungstypen ist erst aufgrund der völlig verschiedenen Struktur der Grenzflächenauslenkung und/oder der vertikalen Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit möglich.

Lösungen der zweiten Art werden in dieser Arbeit nur insofern behandelt, daß die Lösungen des Eigenwertproblems, welche Schwingungen 2. Art zuzuordnen sind, als solche identifiziert, dann aber nicht weiter untersucht werden. (Siehe aber die Anmerkungen im Abschnitt VI).

I.3 Trennung der Bewegung in barotrope und barokline vertikale Eigenfunktion

Charney (1955) zeigt, daß - für den Fall ebenen Bodens - die Trennung der Bewegungen einer zweigeschichteten

Wassermasse in eine barotrope Bewegungsform, bei der die Strömungsgeschwindigkeiten in den beiden Schichten dieselben sind, und eine barokline, oder interne, bei der die Strömungsgeschwindigkeit der jeweiligen Schicht umgekehrt proportional zur Schichttiefe ist, exakt möglich ist. Die für die Unterschicht gültigen Gleichungen in (I.13) werden bei dieser Methode mit einer willkürlichen Konstanten α multipliziert und zu den entsprechenden Gleichungen der Deckschicht addiert, so daß man erhält

$$i\omega \hat{V} + f k \times \hat{V} + g \nabla (\lambda \zeta_1 + \alpha \epsilon h_2 \zeta_2) = 0 \quad , \quad (I.15a)$$

$$i\omega \hat{\zeta} + \nabla \cdot \hat{V} = 0 \quad . \quad (I.15b)$$

Dabei werden folgende Definitionen vorgenommen

$$\begin{aligned} \hat{V} &= V_1 + \alpha V_2 \quad , \quad \hat{\zeta} = \zeta_1 + (\alpha - 1) \zeta_2 \quad , \\ \lambda &= h_1 + \alpha (1 - \epsilon) h_2 \quad . \end{aligned} \quad (I.16)$$

Man sieht, daß das Gleichungssystem (I.15) dann äquivalent dem Gleichungssystem eines Einschichten-Modells wird, wenn die willkürliche Konstante α so gewählt wird, daß der Druckgradientterm in (I.15a) nur noch eine Funktion von $\hat{\zeta}$ ist. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{\alpha \epsilon h_2}{\alpha - 1} = h_1 + \alpha (1 - \epsilon) h_2 \quad . \quad (I.17)$$

Berücksichtigt man, daß ϵ in der Größenordnung von 10^{-3} ist, während das Verhältnis der Schichttiefen sich höchstens um eine Größenordnung von 1 unterscheidet, erhält man folgende zwei approximativen Lösungen der aus (I.17) resultierenden quadratischen Gleichung für α

$$\begin{aligned} \alpha_e &= 1 + \frac{\epsilon h_2}{h_1 + h_2} \quad , \quad \lambda_e = h_1 + h_2 \quad , \\ \alpha_i &= -\frac{h_1}{h_2} \quad , \quad \lambda_i = \frac{\epsilon h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad . \end{aligned} \quad (I.18)$$

Die λ_k ($k=e,i$) stehen für die barotropen (externen) und baroklinen (internen) "Äquivalenztiefen" des Beckens. Die dazu gehörigen Gleichungen folgen hiermit aus (I.15) und haben die Form

$$i\omega V_k + f k \times V_k + g \lambda_k \nabla \zeta_k = 0 \quad , \quad (I.19a)$$

$$i\omega \zeta_k + \nabla \cdot V_k = 0 \quad . \quad (I.19b)$$

Die Variablen folgen aus (I.16) und (I.18)

$$\begin{aligned} \zeta_e &= \zeta_1 + \frac{eh_1}{h_1+h_2} \zeta_2 \quad , \quad V_e = V_1 + V_2 \quad , \\ \zeta_i &= -\frac{h_1+h_2}{h_2} \zeta_2 \quad , \quad V_i = V_1 - \frac{h_1}{h_2} V_2 \quad . \end{aligned} \quad (I.20)$$

Dabei wurde für $k=e$ berücksichtigt, daß

$$1 + \frac{eh_2}{h_1+h_2} \approx 1 \quad , \quad h_2 + eh_2 \approx h_2 \quad ;$$

und für $k=i$, daß $\zeta_1 \ll \zeta_2$ ist.

Aus (I.20) ist ersichtlich, daß für die baroklinen vertikalen Eigenschwingungen ($V_e=0$) $V_1 = -V_2$ gilt, während sich im barotropen Fall ($V_i=0$) die mittleren Geschwindigkeiten der jeweiligen Schicht gleich sind. Die Gleichungen für die baroklinen Bewegungen eines entkoppelten Zweischichten-Systems sind demnach

$$\begin{aligned} i\omega U_2 + f V_2 + g^* h_e \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} &= 0 \quad , \\ i\omega V_2 - f U_2 + g^* h_e \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} &= 0 \quad , \\ i\omega \zeta_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (I.21)$$

Damit ist für die internen Eigenschwingungen ein Gleichungssystem abgeleitet, das sich formal nicht von den für ein barotropes Einschichten-Modell gültigen Gleichungen unterscheidet.

det. Für die internen Schwingungen sind gegenüber den externen (barotropen) Schwingungen lediglich einige Größen anders definiert: der Wert für die Schwerebeschleunigung wird ersetzt durch den reduzierten Wert $g^* = g_e$, die Tiefe wird ersetzt durch eine Äquivalenztiefe $h_e = h_1 h_2 / (h_1 + h_2)$.

Eine andere, näherungsweise Herleitung führt Csanady (1971) für den Fall nicht-konstanten Bodens durch und diese soll hier kritisch nachvollzogen werden. Durch Addition der beiden Kontinuitätsgleichungen in (I.13) ergibt sich für den Gesamtvolumentransport

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1 + h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(h_1 v_1 + h_2 v_2) = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \quad . \quad (I.22)$$

Vernachlässigt man die rechte Seite (ζ_1 ist größenordnungsmäßig 1/1000 der Auslenkung der Grenzfläche ζ_2), dann lassen sich Bewegungen mit divergenzfreiem Gesamttransport folgern. Gleichung (I.22) ist aber keineswegs hinreichend für die Existenz von Bewegungen mit $h_1 u_1 + h_2 u_2 = 0$ und $h_1 v_1 + h_2 v_2 = 0$, wie Csanady (1971) auf Seite 103 ansetzt, um anschließend Gleichungssystem (I.21) auch für variablen Boden abzuleiten. Dies ist eine nicht zulässige Verallgemeinerung.

Anders sieht es aus, wenn die Tiefe nur von einer unabhängigen Variablen abhängig ist, also

$$h_2 = h_2(y), \quad \frac{\partial h_2}{\partial x} \equiv 0 \quad ,$$

oder

$$h_2 = h_2(x), \quad \frac{\partial h_2}{\partial y} \equiv 0 \quad .$$

Dann kann man aus (I.22) folgern, daß $h_1 u_1 + h_2 u_2 = 0$ oder aber $h_1 v_1 + h_2 v_2 = 0$. Siehe dazu auch Abschnitt V.1.2.

II. DIE NUMERISCHE BEHANDLUNG DER GLEICHUNGEN

II.1 Die Diskretisierung der Gleichungen

Bei der Anordnung der Variablen U , V und ζ auf einem numerischen Gitter läge es nahe, jede der Variablen an jedem der Gitterpunkte zu bestimmen. Dieses Vorgehen führt jedoch auf keine größere Genauigkeit als dies bei einer Anordnung der Variablen an unterschiedlichen Punkten der Fall ist (Platzman 1958), hat aber beträchtlich größere Anforderungen bezüglich des Rechenaufwands zur Folge.

Unter den verschiedenen Möglichkeiten versetzter Gitter scheint für die Lösung des Systems (I.13) die in Abb.II.1 angedeutete Anordnung angebracht zu sein, welche U am selben Punkt wie V beschreibt und die ζ -Werte auf den dazwischen liegenden Punkten nimmt. Dieses Schema erlaubt eine äußerst einfache Behandlung der Randbedingungen (I.14) und vermeidet bei der Berechnung des Coriolisterms in den Bewegungsgleichungen die Notwendigkeit einer Interpolation. Außerdem ist an allen Punkten die Bildung der Gradienten in Horizontalrichtung ohne vorhergehende Interpolation möglich.

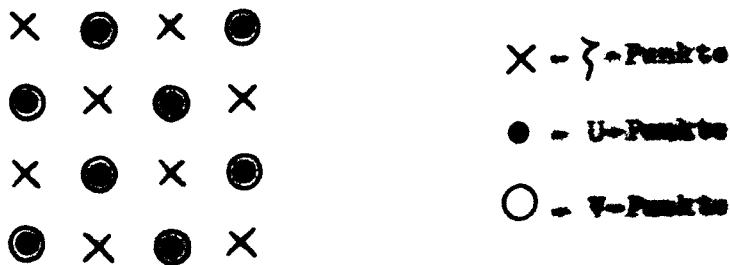


Abb.II.1 Die Anordnung der Variablen in der Horizontalen.

Die Ableitungen in x - bzw. y -Richtung im System (I.13) werden an inneren Punkten ersetzt durch zentrale Differenzenquotienten gemäß

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{\zeta(l,m)} = \frac{U(l+1,m) - U(l-1,m)}{2\Delta x}, \quad (\text{II.1a})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{\zeta(l,m)} = \frac{V(l,m+1) - V(l,m-1)}{2\Delta y}, \quad (\text{II.1b})$$

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{u,v(l,m)} = \frac{\zeta(l+1,m) - \zeta(l-1,m)}{2\Delta x} , \quad (\text{II.1c})$$

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right|_{u,v(l,m)} = \frac{\zeta(l,m+1) - \zeta(l,m-1)}{2\Delta y} . \quad (\text{II.1d})$$

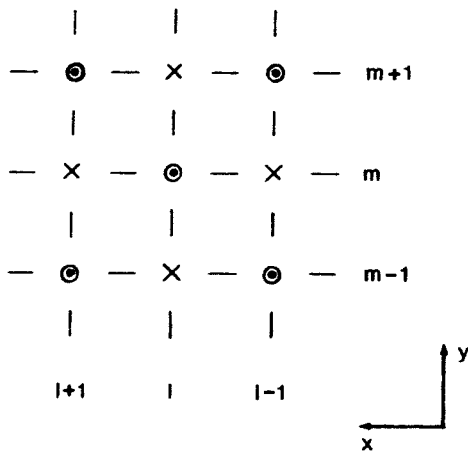


Abb.II.2 Das Gitter

beim U,V-Punkt (l,m).

Symbole wie in Abb.II.1.

Die Diskretisierung der Bewegungsgleichungen aus (I.13) an einem beliebigen inneren U-bzw. V-Punkt (l,m) ergibt mit (II.1c) und (II.1d) nach Trennung von Real- und Imaginärteil für die Deckschicht

$$\begin{aligned} -\omega U_i^r(l,m) - f V_i^i(l,m) - \frac{gh_i(l,m)}{2\Delta x} (\zeta_i^i(l+1,m) - \zeta_i^i(l-1,m)) &= 0 , \\ -\omega U_i^i(l,m) + f V_i^r(l,m) + \frac{gh_i(l,m)}{2\Delta x} (\zeta_i^r(l+1,m) - \zeta_i^r(l-1,m)) &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{II.2a})$$

$$\begin{aligned} -\omega V_i^r(l,m) + f U_i^i(l,m) - \frac{gh_i(l,m)}{2\Delta y} (\zeta_i^i(l,m+1) - \zeta_i^i(l,m-1)) &= 0 , \\ -\omega V_i^i(l,m) - f U_i^r(l,m) + \frac{gh_i(l,m)}{2\Delta y} (\zeta_i^r(l,m+1) - \zeta_i^r(l,m-1)) &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{II.2b})$$

und für die Unterschicht

$$\begin{aligned}
 -\omega U_2^r(\ell, m) - f V_2^i(\ell, m) - \frac{g \delta h_2(\ell, m)}{2 \Delta x} (\zeta_1^i(\ell+1, m) - \zeta_1^i(\ell-1, m)) \\
 - \frac{g \epsilon h_2(\ell, m)}{2 \Delta x} (\zeta_2^i(\ell+1, m) - \zeta_2^i(\ell-1, m)) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{II.3a}$$

$$\begin{aligned}
 -\omega U_2^i(\ell, m) + f V_2^r(\ell, m) + \frac{g \delta h_2(\ell, m)}{2 \Delta x} (\zeta_1^r(\ell+1, m) - \zeta_1^r(\ell-1, m)) \\
 + \frac{g \epsilon h_2(\ell, m)}{2 \Delta x} (\zeta_2^r(\ell+1, m) - \zeta_2^r(\ell-1, m)) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\omega V_2^r(\ell, m) + f U_2^i(\ell, m) - \frac{g \delta h_2(\ell, m)}{2 \Delta y} (\zeta_1^i(\ell, m+1) - \zeta_1^i(\ell, m-1)) \\
 - \frac{g \epsilon h_2(\ell, m)}{2 \Delta y} (\zeta_2^i(\ell, m+1) - \zeta_2^i(\ell, m-1)) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{II.3b}$$

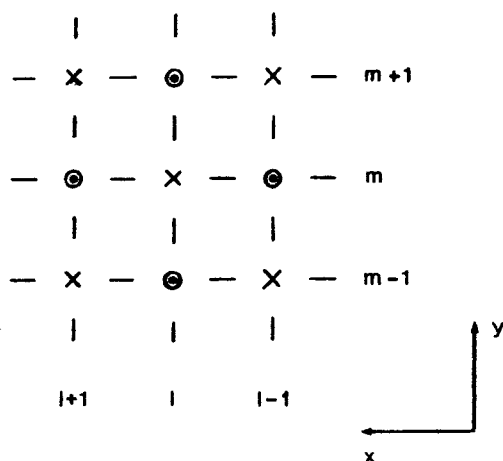
$$\begin{aligned}
 -\omega V_2^i(\ell, m) - f U_2^r(\ell, m) + \frac{g \delta h_2(\ell, m)}{2 \Delta y} (\zeta_1^r(\ell, m+1) - \zeta_1^r(\ell, m-1)) \\
 + \frac{g \epsilon h_2(\ell, m)}{2 \Delta y} (\zeta_2^r(\ell, m+1) - \zeta_2^r(\ell, m-1)) = 0.
 \end{aligned}$$

Dabei ist $U_1 = U_1^r + i U_1^i$, $V_1 = V_1^r + i V_1^i$, ..., $\zeta_2 = \zeta_2^r + i \zeta_2^i$ gesetzt worden.

Abb.II.3 Das Gitter

beim ζ -Punkt (l, m) .

Symbole wie in Abb.II.1.



Die Diskretisierung der Kontinuitätsgleichungen am ζ -Punkt (l, m) ergibt mit (II.1a) und (II.1b) für die Deckschicht

$$\begin{aligned}
 & -\omega \zeta_1^r(l, m) - \frac{1}{2\Delta x} (U_1^i(l+1, m) - U_1^i(l-1, m)) - \frac{1}{2\Delta y} (V_1^i(l, m+1) - V_1^i(l, m-1)) \\
 & - \frac{1}{2\Delta x} (U_2^i(l+1, m) - U_2^i(l-1, m)) - \frac{1}{2\Delta y} (V_2^i(l, m+1) - V_2^i(l, m-1)) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{II.4}$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega \zeta_1^i(l, m) + \frac{1}{2\Delta x} (U_1^r(l+1, m) - U_1^r(l-1, m)) + \frac{1}{2\Delta y} (V_1^r(l, m+1) - V_1^r(l, m-1)) \\
 & + \frac{1}{2\Delta x} (U_2^r(l+1, m) - U_2^r(l-1, m)) + \frac{1}{2\Delta y} (V_2^r(l, m+1) - V_2^r(l, m-1)) = 0,
 \end{aligned}$$

und für die Unterschicht

$$\begin{aligned}
 & -\omega \zeta_2^r(l, m) - \frac{1}{2\Delta x} (U_2^i(l+1, m) - U_2^i(l-1, m)) - \frac{1}{2\Delta y} (V_2^i(l, m+1) - V_2^i(l, m-1)) = 0, \\
 & -\omega \zeta_2^i(l, m) + \frac{1}{2\Delta x} (U_2^r(l+1, m) - U_2^r(l-1, m)) + \frac{1}{2\Delta y} (V_2^r(l, m+1) - V_2^r(l, m-1)) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Die Diskretisierung der Differentialquotienten an Punkten auf seitlichen Rändern ist anders vorzunehmen als an inneren Punkten. Dabei lassen sich Eckpunkte und Randpunkte unterscheiden.

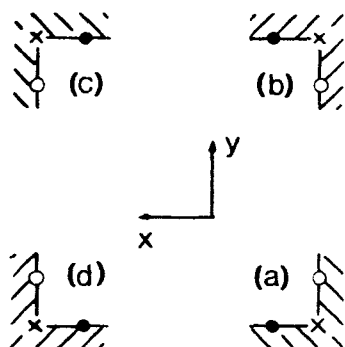


Abb.II.4 Die vier Eckpunkte, an denen keine zentralen Differenzenquotienten genommen werden. Symbole wie in Abb.II.1.

An Eckpunkten, die von ζ -Punkten eingenommen werden sollen und an denen deshalb die Kontinuitätsgleichung gilt, wird der im Inneren gebräuchliche zentrale Differenzenquotient ersetzt durch einen Vorwärts- bzw. einen Rückwärts-Differenzenquotienten. Dabei nimmt man die für den Eckpunkt (l,m) gültigen Randbedingungen $U(l,m) = 0$ und $V(l,m) = 0$. So ergibt sich z.B. für den Eckpunkt (a) der Abb.II.4

$$-\omega \zeta_{1,2}^r(l,m) - \frac{1}{\Delta x} (U_{1,2}^i(l+1,m)) - \frac{1}{\Delta y} (V_{1,2}^i(l,m+1)) = 0 \quad ,$$

$$-\omega \zeta_{1,2}^i(l,m) + \frac{1}{\Delta x} (U_{1,2}^r(l+1,m)) - \frac{1}{\Delta y} (V_{1,2}^r(l,m+1)) = 0 \quad .$$

Bei seitlichen Randpunkten unterscheidet man Punkte, an denen die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein soll (ζ -Punkte), von solchen, an denen die Bewegungsgleichungen gültig sind (U-Punkte oder V-Punkte). An ζ -Randpunkten (siehe Abb.II.5) geht man bezüglich der Normalenrichtung über zu Vorwärts- bzw. Rückwärts-Differenzenquotienten, längs des Randes besteht weiterhin die Möglichkeit des Gebrauchs zentraler Differenzen-

quotienten. So ergibt sich z.B. für den ζ -Randpunkt (d) der Abb.II.5

$$-\omega \zeta_{1,2}^r - \frac{1}{\Delta x} (-U_{1,2}^i(l-1, m)) - \frac{1}{2\Delta y} (V_{1,2}^i(l, m+1) - V_{1,2}^i(l, m-1)) = 0 \quad ,$$

$$-\omega \zeta_{1,2}^i + \frac{1}{\Delta x} (-U_{1,2}^r(l-1, m)) - \frac{1}{2\Delta y} (V_{1,2}^r(l, m+1) - V_{1,2}^r(l, m-1)) = 0 \quad .$$

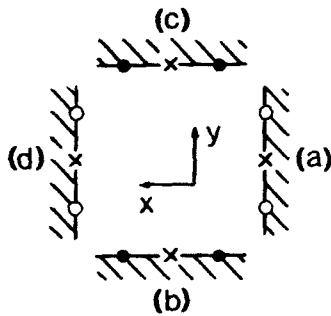


Abb.II.5 ζ -Randpunkte.
Symbole wie in Abb.II.1.

An U- bzw. V-Randpunkten (siehe Abb.II.6) wird jeweils nur die Komponente der Bewegungsgleichungen herangezogen, die aufgrund der Gültigkeit von $V_n=0$ noch zu beachten ist. So gilt bei den V-Punkten (a) und (b): $U(1, m)=0$. Bei den U-Punkten (c) und (d) gilt $V(1, m)=0$. Demnach nimmt man bei (a) und (b) die zweite Komponente der Bewegungsgleichungen, während bei (c) und (d) die erste Komponente der Bewegungsgleichungen genommen wird.

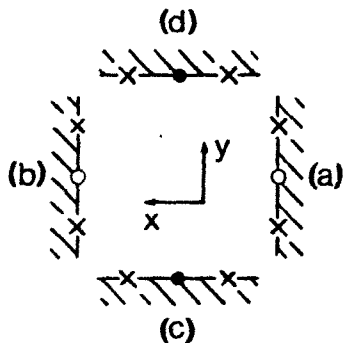


Abb.II.6 U- bzw. V-Randpunkte. Symbole wie in Abb.II.1.

Wird nun an jedem Punkt des Gitternetzes (simultan für die Deckschicht und für die Unterschicht) die dort gültige

Differenzengleichung genommen, so erkennt man, daß z.B. zwischen den $\zeta_{1,2}^i$, $U_{1,2}^i$ und $V_{1,2}^r$ -Werten bei $x=1 \cdot \Delta x$ keine Verknüpfung besteht zu den benachbarten $\zeta_{1,2}^i$, $U_{1,2}^i$ und $V_{1,2}^r$ -Werten bei $(1+1) \cdot \Delta x$ bzw. $(1-1) \cdot \Delta x$, sondern lediglich eine Verknüpfung zu den $\zeta_{1,2}^r$, $U_{1,2}^r$ und $V_{1,2}^i$ -Werten bei $(1+1) \cdot \Delta x$ bzw. $(1-1) \cdot \Delta x$ vorhanden ist. Die unterstrichenen Variablen des in Abb.II.7a skizzierten Gitters sind also völlig entkoppelt von den nicht unterstrichenen Variablen, so daß man sich das Gitter der Abb.II.7a zusammengesetzt denken kann aus zwei gegeneinander versetzten Gittern des Typs der Abb.II.7b. Das heißt aber auch, daß es zwei voneinander völlig unabhängige Systeme von Gleichungen gibt, die - jedes für sich - die Lösung des Eigenwertproblems beinhalten.

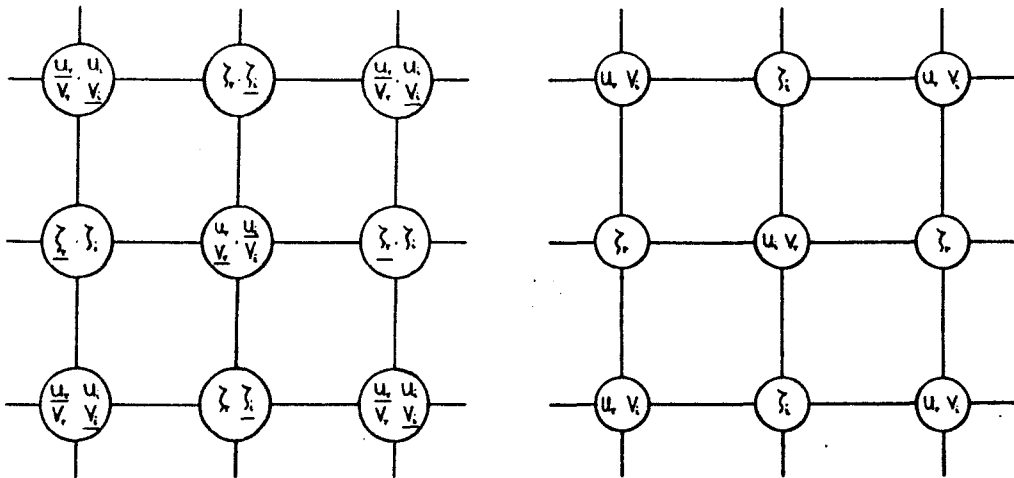


Abb.II.7a,b Zwei Typen von Gittern. (Indizes zur Kennzeichnung des Real- bzw. Imaginärteils sind in den Abb.II.7-II.9 unten angebracht).

Bei Nichtberücksichtigung der Corioliskraft hängen nur noch die in Abb.II.8 unterstrichenen Veränderlichen des Gitters der Abb.II.7b voneinander ab. Die gleiche Aussage gilt für die nicht-unterstrichenen Variablen. Das Gitter der Abb.II.8 setzt sich in diesem Fall ($f=0$) zusammen aus zwei versetzten Elementargittern, die im folgenden A-Gitter bzw.

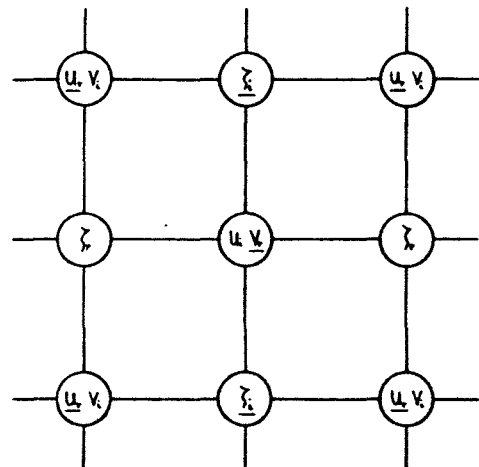


Abb.II.8 Das Gitter der Abb.II.7b.

B-Gitter genannt werden sollen. Die Lösungen auf diesen Elementargittern sind im Fall verschwindender Erdrotation völlig voneinander entkoppelt. Es liegt also nahe, im Falle reiner Schwerewellen ($f=0$) die Lösung von (I.13) auf einem dieser Untergitter zu berechnen. Dabei ist aber zu beachten (siehe dazu Abb.II.9a,b), daß die Ränder des Gebiets verschieden erfaßt werden und sich somit die Bodenkonfiguration bei den beiden Gittern verschieden darstellt. Man erkennt, daß sich für das B-Gitter der Rand des Beckens lediglich über die Randbedingungen $V_{1,2}=0$ oder $U_{1,2}=0$ vermittelt, daß also die Randtiefen nicht explizit in das zu lösende Problem eingehen.

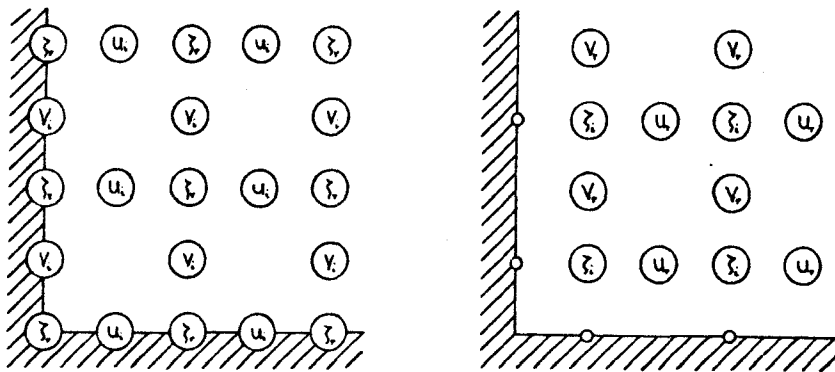


Abb.II.9 a) Das A-Gitter

b) Das B-Gitter

Die Reihenfolge der zu berechnenden Werte auf dem Gitterpunktnetz wird so festgelegt, wie das in Abb.II.10 angedeutet ist: beginnend mit dem ζ -Wert der "rechten, unteren"

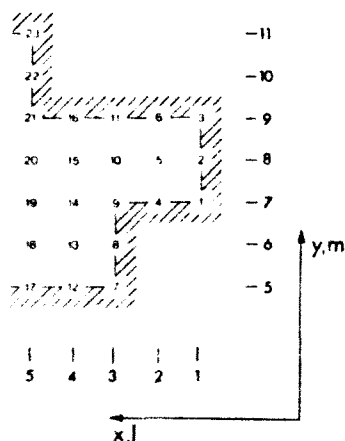


Abb.II.10 Die Anordnung der Variablen.

Ecke wird in y-Richtung voranschreitend innerhalb der Deckschicht numeriert bis das Ende der ersten "Spalte" erreicht ist. Anschließend kommen die Werte der Unterschicht derselben Spalte. Dann wird in x-Richtung weiter gegangen und vom "unteren" Rand beginnend, in y-Richtung vorangehend numeriert, u.s.w.. Das ergibt für das in Abb.II.10

skizzierte Gitter folgende Reihenfolge der zu berechnenden Gitterpunktwerte:

$$\begin{aligned}
 & \zeta_1^r(1,7) \quad v_1^i(1,8) \quad \zeta_1^r(1,9) \quad \zeta_2^r(1,7) \quad v_2^i(1,8) \quad \zeta_2^r(1,9); \\
 & u_1^i(2,7) \quad \zeta_1^i(2,8) \quad u_1^i(2,9) \quad u_2^i(2,7) \quad \zeta_2^i(2,8) \quad u_2^i(2,9); \\
 & \zeta_1^r(3,5) \quad v_1^i(3,6) \quad \zeta_1^r(3,7) \quad u_1^r(3,8) \quad v_1^i(3,8) \quad \zeta_1^r(3,9) \quad \zeta_2^r(3,5) \\
 & v_2^i(3,6) \quad \zeta_2^r(3,7) \quad u_2^r(3,8) \quad v_2^i(3,8) \quad \zeta_2^r(3,9); \\
 & u_1^i(4,5) \quad \dots
 \end{aligned}$$

Man erkennt die Möglichkeit der "blockweisen" Anordnung der Variablen. Da Variable der "Spalte" $l \cdot \Delta x$ mittels der entsprechenden Differenzengleichung immer nur mit Variablen von $(l-1) \cdot \Delta x$ und $(l+1) \cdot \Delta x$ verknüpft sind, zeichnet sich eine Dreier-Struktur des Systems der Differenzengleichungen ab.

II.2 Der Lösungsalgorithmus

Beim Lösen des Systems partieller Differentialgleichungen (I.13) mit Hilfe des in Abschnitt II.1 beschriebenen Differenzen-Schemas reduziert sich das Eigenwertproblem auf die Lösung des Systems linearer Gleichungen

$$QW = \omega W \quad . \quad (II.6)$$

Der Lösungsvektor W setzt sich zusammen aus den an jedem der Gitterpunkte zu berechnenden Werten. Die hierbei auftretende Matrix besteht hauptsächlich aus Nullen und hat die spezielle Form einer quasi-tridiagonalen Matrix:

$$\hat{Q} = Q - \omega I = \begin{bmatrix} M_1 - \omega I_1 & E_1 & 0 & \dots & 0 \\ D_2 & M_2 - \omega I_2 & E_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_3 & M_3 - \omega I_3 & E_3 & \dots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & D_{L-1} & M_{L-1} - \omega I_{L-1} & E_{L-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_L & M_L - \omega I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n, M_n - \omega I_n, E_n \end{bmatrix}_1^L,$$

wobei die D_n , M_n und E_n Matrizen der gleichen Zeilenzahl, E_n , M_{n+1} und D_{n+2} Matrizen der gleichen Spaltenzahl und die M_n quadratisch sind. I_n ist eine Einheitsmatrix derselben Ordnung wie M_n . Die Blockmatrizen der Zeile n ergeben sich aus den Differenzengleichungen bei $l = n$.

Sei zunächst ω verschieden von einem der Eigenwerte ω_i des Eigenwertproblems. Dann besteht die Möglichkeit der Reduktion von \hat{Q} auf die Form

$$\hat{Q} = L \cdot U, \quad (II.7)$$

wobei L und U quadratische Matrizen sind, die auf dieselbe Weise in Blöcke zerlegt sind wie \hat{Q} und die folgende Form haben

$$L = \left[C_n, I_n, 0 \right]_1^L,$$

$$U = \left[0, A_n, E_n \right]_1^L.$$

I_n ist wiederum die Einheitsmatrix derselben Ordnung wie \hat{M}_n . Vergleicht man die linke und die rechte Seite von (II.7) und setzt man für $1 < n < L$

$$A_1 = \hat{M}_1, \quad D_n = C_n A_{n-1}, \quad \hat{M}_n = C_n E_{n-1} + A_{n-1},$$

so kann man, wenn die A_n nicht-singulär sind, die A_n und C_n rekursiv erhalten gemäß

$$A_n = \hat{M}_n - D_n (A_{n-1})^{-1} E_{n-1}, \quad A_1 = \hat{M}_1, \quad (II.8)$$

$$C_n = D_n (A_{n-1})^{-1}, \quad 1 < n \leq L. \quad (II.9)$$

Wie Schechter (1960) zeigt, ist eine hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der Faktorenerlegung gemäß (II.8)-(II.9) die Nicht-Singularität der Q_1, Q_2, \dots, Q_L , wobei

$$Q_1 = \hat{M}_1, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \hat{M}_1 & E_1 \\ D_2 & \hat{M}_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad Q_n = \left[D_n, \hat{M}_n, E_n \right]_1^n, \quad \dots, \quad Q_L = \hat{Q}.$$

und die Aufspaltung ist dann eindeutig gegeben durch die Rekursion (II.8)-(II.9). In diesem Fall ist

$$\det(Q - \omega I) = \det \hat{Q} = \prod_{k=1}^L \det A_k \quad (\text{II.10})$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. die Wurzeln der Gleichung $\det(Q - \omega I) = 0$, sind die Eigenwerte der Matrix Q . Im vorliegenden Fall werden sie ermittelt, indem, ausgehend von irgendeiner Anfangsnäherung $\omega^{(0)}$ für eine Nullstelle, zunächst

$$f(\omega^{(0)}) = \det(Q - \omega^{(0)} I)$$

und dann

$$f(\omega^{(i)}) = f(\omega^{(i)} + (\Delta\omega)^{(i)}) = \det(Q - (\omega^{(i)} + (\Delta\omega)^{(i)}) I)$$

berechnet wird. Dieses Vorgehen wird mit verfeinertem $(\Delta\omega)^{(i)}$ ($i=0,1,2,\dots$) iterativ so lange fortgeführt bis die Nullstelle von $f(\omega) = \det(Q - \omega I)$ beliebig genau bestimmt ist.

Die Bestimmung der Komponenten des zu dem Eigenwert ω_i gehörenden Eigenvektors w^i verlangt die Lösung des homogenen Systems linearer Gleichungen

$$(Q - \omega_i I) w^i = 0 \quad (\text{II.11})$$

Auf dieselbe Weise wie die Blockmatrizen M_n , D_n , E_n ist auch der Eigenvektor w^i zerlegt

$$w^i = \begin{pmatrix} w_1^i \\ \vdots \\ w_L^i \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die Lösung w^i des Systems (II.11) rekursiv gemäß

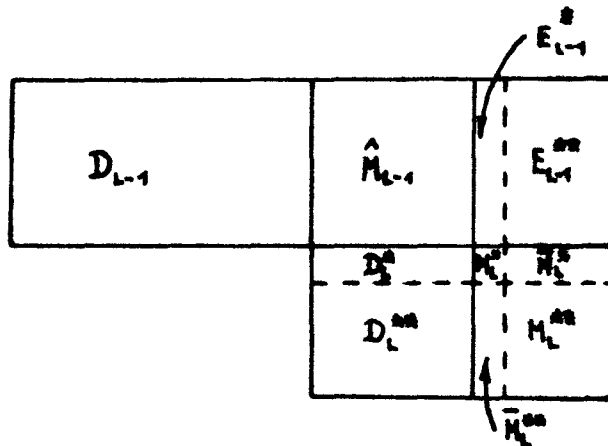
$$w_n^i = -\left(A_n\right)^{-1} E_n w_{n+1}^i, \quad 1 \leq n < L \quad (\text{II.12})$$

w_L^i (bzw. einen Teil davon, siehe nächste Seite) kann man vor-



geben, so daß man ausgehend von einem Randpunkt den gesamten Lösungsvektor konstruieren kann.

Wenn in der Koeffizientenmatrix \hat{Q} der Rang der letzten Blockmatrix > 2 ist, muß ein besonderes Verfahren angewandt werden.



Die letzten der Gleichungen aus (II.11) können auch folgendermaßen geschrieben werden (die Bezeichnungen sind der oben stehenden Skizze zu entnehmen)

$$\begin{aligned} D_{L-1} w_{L-2} + \hat{M}_{L-1} w_{L-1} + E_{L-1}^* w_L^* + E_{L-1}^{**} w_L^{**} &= 0 \\ D_L^* w_{L-1} + M_L^* w_L^* + \bar{M}_L^* w_L^{**} &= 0 \\ D_L^{**} w_{L-1} + \bar{M}_L^{**} w_L^* + M_L^{**} w_L^{**} &= 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$w_L^{**} = - (M_L^{**})^{-1} D_L^{**} w_{L-1} - (M_L^{**})^{-1} \bar{M}_L^{**} w_L^* .$$

Damit wird in die drittletzte der Gleichungen eingegangen.

Das ergibt

$$D_{L-1} w_{L-2} + (\hat{M}_{L-1} - E_{L-1}^{**} (M_L^{**})^{-1} D_L^{**}) w_{L-1} + (E_{L-1}^* - E_{L-1}^{**} (M_L^{**})^{-1} \bar{M}_L^{**}) w_L^* = 0 .$$

w_L^* kann vorgegeben werden und man folgert

$$w_{L-1} = C_L w_L^* ,$$

wobei

$$C_L = - \hat{R}_{L-1}^{-1} (E_{L-1}^* - E_{L-1}^{**} (M_L^{**})^{-1} \bar{M}_L^{**}) .$$

Dabei ist

$$\hat{R}_{L-1} = D_{L-1} C_{L-1} + (\hat{M}_{L-1} - E_{L-1}^{**} (M_L^{**})^{-1} D_L^{**})$$

mit (ganz normalem)

$$C_{L-1} = - \hat{R}_{L-2} E_{L-2} .$$

III. TESTRECHNUNGEN

III.1 Rechteckige Becken bei ebenem Boden

Als Testbecken für den barotropen Fall wird ein rechteckiges (2x1) - Becken der Länge $L = 40$ km und der Breite $B = 20$ km gewählt. Bei konstanter Wassertiefe sind im rotationsfreien Fall alle Lösungen analytisch berechenbar, bei Berücksichtigung der Erdrotation sind die Lösungen von Rao (1966) die ausführlichsten.

Als Testbecken für den zweigeschichteten Fall wird ein rechteckiges (5x1) - Becken der Länge $L = 60$ km und der Breite $B = 12$ km gewählt. Die Lösungen werden verglichen mit denen, die Rao (1977) angibt.

Mit den in Abschnitt II.1 beschriebenen Differenzengleichungen und dem im Abschnitt II.2 hergeleiteten Lösungsverfahren werden einige dieser bekannten Lösungen nachvollzogen. Dabei wird ein besonderes Augenmerk auf die Unterschiedlichkeit der beiden Gitter und auf Fragen der Auflösung gelegt.

III.1.1 Rotationsfreier, barotroper Fall

Die Eigenfrequenzen bzw. Eigenperioden eines 40 km langen und 20 km breiten Beckens mit der konstanten Tiefe von 100 m ergeben sich aus (siehe z.B. Krauss (1973))

$$\omega_{l,m} = \frac{\ell\pi}{L} \sqrt{gH \left(1 + \left(\frac{mL}{\ell B}\right)^2\right)} ; T_{l,m} = \frac{2L}{\ell \sqrt{gH \left(1 + \left(\frac{mL}{\ell B}\right)^2\right)}} . \quad (\text{III.1})$$

Die Indizierung (l,m) gibt für den Fall $f = 0$ eine Schwingung mit l Knotenlinien der Oberflächenauslenkung in Längsrichtung und m Knotenlinien in Querrichtung des Beckens an. Da ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Eigenschwingungen im rotationsbehafteten Fall mit denen des rotationsfreien Falls besteht, wird diese Indizierung in beiden Fällen als Kennzeichnung der einzelnen Schwingungsordnungen verwandt.

Wenn $f = 0$ ist, sind - wie in Abschnitt II.1 dargelegt - die Lösungen auf den beiden Gittern voneinander unabhängig. In Abb.III.1 ist angedeutet, wie die Variablen des A-Gitters bzw. des B-Gitters über das Rechteck verteilt sind.

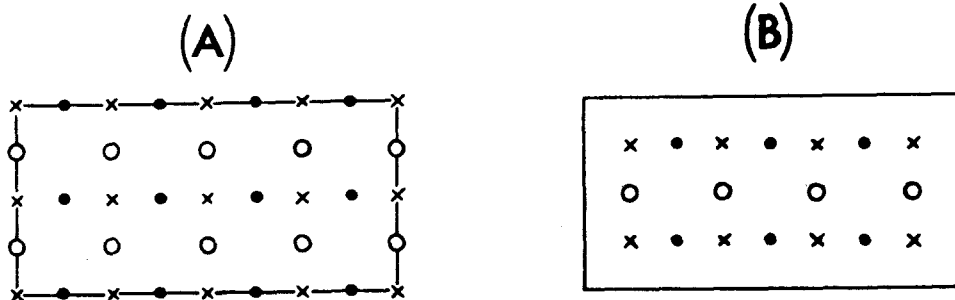
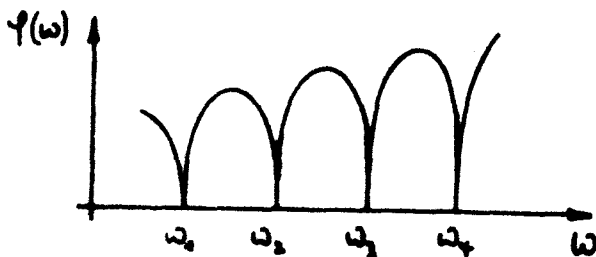


Abb.III.1 Verteilung der Variablen. (A) Auf dem A-Gitter; (B) auf dem B-Gitter. Kreuze bedeuten ζ -Punkte, offene Kreise stehen an V-Punkten, schwarze Kreise stehen an U-Punkten.

Hat das rechteckige Becken zudem noch ebenen Boden, dann sind die Lösungen auf den beiden Gittern identisch. Das hat u.a. zur Folge, daß das Determinantenpolynom $\varphi(\omega) = \det \hat{Q}$



für den Fall, daß man das vollständige Gleichungssystem (II.2a-II.5b) heranzieht, keine Nulldurchgänge mehr hat, sondern nur noch positive Werte annimmt ($\varphi(\omega)$ hat nur noch Potenzen in ω

von gerader Ordnung). Bei den Eigenfrequenzen kommt $\varphi(\omega)$ beliebig nahe an Null heran, wie das in der nebenstehenden Skizze angedeutet ist.

Nach Gleichung (III.1) ergibt sich für die Grundschwingung in Längsrichtung ($l=1, m=0$), wenn man eine Länge von $L = 40$ km und eine Tiefe des Beckens von $H = 100$ m ansetzt, die Merianfrequenz

$$\omega_0 = \omega_{1,0} = 2.46_{10}^{-3} \text{ sec}^{-1}. \quad (\text{III.2})$$

Abb.III.2 zeigt das Ergebnis der numerischen Berechnung für verschiedene Gitterabstände. Man erkennt die schnelle Annäherung an den analytischen Wert.

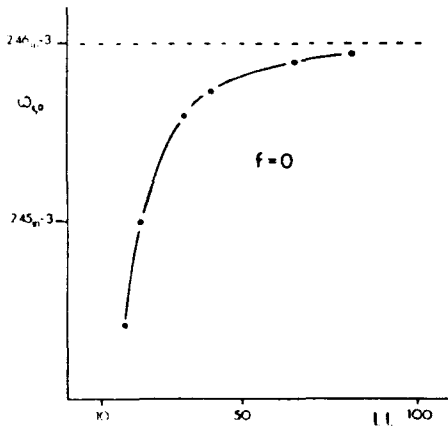


Abb.III.2 Berechnetes $\omega_{1,0}$ im rotationsfreien Fall als Funktion der Gitterpunktanzahl LL in Längsrichtung. Die Annäherung erfolgt an die in (III.2) angegebene Frequenz.

III.1.2 Barotropes (2x1) - Rechteck bei Erdrotation ($f/\omega_0=2$)

Der in Abschnitt III.1.1 behandelte Fall des rechteckigen (2x1) - Beckens wird nun unter Berücksichtigung der Erdrotation berechnet. Das Ergebnis läßt sich mit den Raoschen Rechnungen (Rao 1966) vergleichen. Es wird ein Verhältnis der Trägheitsfrequenz f zur Eigenfrequenz der rotationsfreien Längsschwingung 1.Ordnung ω_0 von 2:1 angenommen. Daraus ergibt sich ein Coriolisparameter von $f = 4.92_{10}^{-3} \text{ sec}^{-1}$. Abb.III.3 zeigt die Ergebnisse der beiden Gitter, die sich - im Gegensatz zum rotationsfreien Fall - voneinander unterscheiden. Wie in Abb.III.3 aber auch zu entnehmen ist, konvergieren die Lösungen der beiden Gitter bei Verfeinerung des Gitters gegen einen gemeinsamen Grenzwert. Der Wert, dem sich die beiden Lösungen asymptotisch nähern, liegt geringfügig oberhalb der Raoschen Lösung.

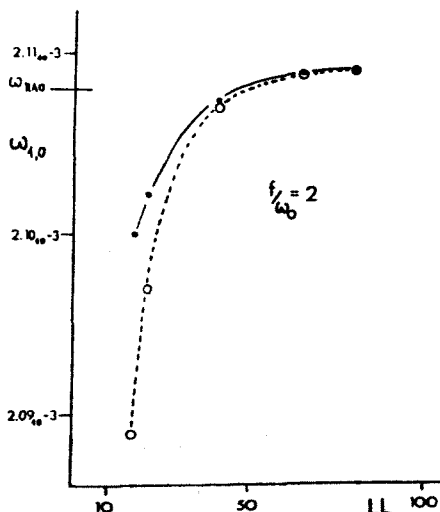


Abb.III.3 Berechnetes $\omega_{1,0}$ des (2x1) - Beckens bei $f/\omega_0=2$ in Abhängigkeit von der Gitterpunktanzahl LL in Längsrichtung.
• steht an den Ergebnissen des A-Gitters, o an solchen des B-Gitters.

III.1.3 Zweigeschichtetes (5x1) - Rechteck

Die ersten Testrechnungen mit einem zweigeschichteten Wasserbecken befassen sich mit den Lösungen, die Rao (1977) für ein (5x1) - Rechteck angibt. Zunächst werden einige dieser Lösungen nachvollzogen, die allerdings mit einem wie in Abschnitt I.3 beschriebenen, entkoppelten Modell gewonnen sind und somit eigentlich keine prinzipielle Erweiterung des barotropen Falles sind. Dann werden diese Fälle aber auch unter Berücksichtigung der Kopplung zwischen barotroper und barokliner Bewegung berechnet und damit ein erster Vergleich zwischen den Lösungen der beiden Modelle ermöglicht.

Die Frequenz der internen Längsschwingung niederster Ordnung im Falle $f = 0$ ist gegeben durch

$$\omega_0 = \sqrt{g\epsilon h_e} \pi / L \quad . \quad (III.3)$$

Mit dieser Frequenz wird der Coriolisparameter f und die Eigenfrequenz ω der zu berechnenden Schwingung dimensionsfrei gemacht, indem man setzt

$$F = f/\omega_0 \quad ; \quad \Omega = \omega/\omega_0 \quad .$$

Für Bodensee-Verhältnisse scheinen eine Länge von 60 km und - im Falle eines (5x1) - Rechtecks daraus resultierend - eine Breite von 12 km angemessene Ausdehnungen zu sein. Damit ergibt sich bei $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$, $\epsilon = 5.3_{10}^{-4}$ und $h_e = 21 \text{ m}$ für die Grundfrequenz ω_0 der Wert von $\omega_0 = 17.30_{10}^{-6} \text{ sec}^{-1}$. Von den Raoschen Ergebnissen sollen diejenigen nachvollzogen werden, die in Fig.1 bei Rao (1977) mit D,E,F markiert sind und die der (0,1)-Schwingung bei den dimensionsfreien Rotationsraten $F=1$, $F=4$ und $F=5$ zuzuordnen sind. Die Eigenfrequenzen, die sich aus Fig.2 bei Rao (1977) hierfür ablesen lassen, sind

$$\begin{aligned} \omega_D &= 5.13 \times \omega_0 = 88.749_{10}^{-6} \text{ sec}^{-1} \quad \text{bei} \quad f_D = 0.173_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1} \quad , \\ \omega_E &= 6.18 \times \omega_0 = 106.914_{10}^{-6} \text{ sec}^{-1} \quad \text{bei} \quad f_E = 0.692_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1} \quad , \\ \omega_F &= 6.27 \times \omega_0 = 108.471_{10}^{-6} \text{ sec}^{-1} \quad \text{bei} \quad f_F = 0.865_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1} \quad . \end{aligned}$$

III.1.3.1 Entkoppeltes Modell

In Abschnitt I.3 wurde gezeigt, daß bei konstanter Wassertiefe die Zerlegung der Bewegung in die barotrope bzw. barokline vertikale Eigenfunktion exakt möglich ist, und

vermittels der Beziehungen (I.18)-(I.20) gibt es eine Approximation für diese beiden vertikalen Eigenfunktionen.

Die Diskretisierung der Gleichungen eines entkoppelten Zweischichten-Modells (I.21) geschieht völlig identisch zum Einschichten-Modell, führt somit auf ein äquivalentes System von Differenzengleichungen. Man hat lediglich g durch $g^* = g_e$ und H durch h_e zu ersetzen. Damit erhält man für die eben angesprochenen Fälle aus Rao (1977) die in Tabelle III.1 aufgeführten Ergebnisse (in Klammer stehen die Ergebnisse, die dem B-Gitter zuzuordnen sind).

Tabelle III.1 Vergleich einiger Ergebnisse aus Rao (1977) mit Ergebnissen des entkoppelten Modells (LL=101)

Coriolispar. (sec^{-1})	Eigenfrequenzen (sec^{-1})		
	Rao(1977)	A-Gitter	B-Gitter
$f_D = 0.173_{40} \cdot 10^{-4}$	$8.8749_{40} \cdot 10^{-5}$	$8.9397_{40} \cdot 10^{-5}$	($8.9398_{40} \cdot 10^{-5}$)
$f_E = 0.692_{40} \cdot 10^{-4}$	$10.6914_{40} \cdot 10^{-5}$	$10.6548_{40} \cdot 10^{-5}$	($10.6567_{40} \cdot 10^{-5}$)
$f_F = 0.865_{40} \cdot 10^{-4}$	$10.8471_{40} \cdot 10^{-5}$	$10.7881_{40} \cdot 10^{-5}$	($10.7911_{40} \cdot 10^{-5}$)

Man sieht, daß die Werte für die Eigenfrequenzen sich etwas von den Raoschen Werten unterscheiden. Dies könnte in der Begrenzung der Anzahl der 'basis functions' liegen, die Rao bei seinem Lösungsverfahren vornimmt (siehe dazu Rao (1977)). In Abb.III.4 ist das Konvergenzverhalten des vorliegenden Lösungsverfahrens am Beispiel der (1,0)-Schwingung bei $f = 1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ aufgezeigt. (Für diesen Fall hat f/ω_0 einen Wert von 6.18).

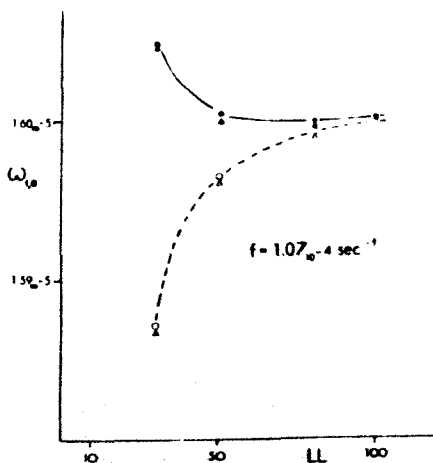


Abb.III.4 Konvergenzverhalten beim zweigeschichteten (5x1) - Rechteck. $f = 1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ entspricht dem für den Bodensee gültigen Coriolisparameter. • steht für Ergebnisse des A-Gitters, o für solche des B-Gitters. (▲ und △ sind mit dem gekoppelten Modell gewonnen).

III.1.3.2 Gekoppeltes Modell

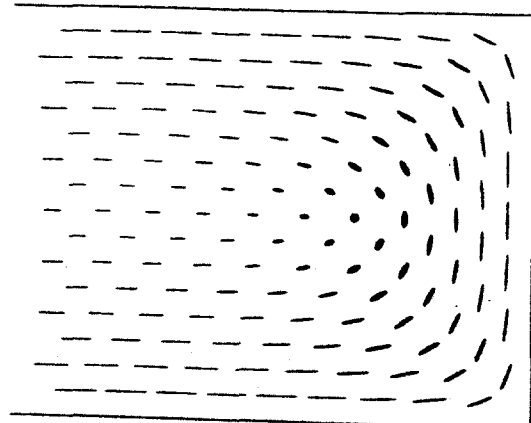
Mit dem vollständigen (gekoppelten) Modell, das die Kopplung zwischen barotroper und barokliner Bewegung berücksichtigt, wird der soeben behandelte Fall der (1,0)-Schwingung bei $f=1.07_{10}-4 \text{ sec}^{-1}$ berechnet. Wie in Abschnitt II.1 beschrieben wurde, erfordert dies die Verdopplung der Gitterpunktanzahl und führt damit auf eine Verdopplung sowohl der Zeilen- als auch der Spaltenzahl in der Koeffizientenmatrix des Eigenwertproblems. Tabelle III.2 ermöglicht einen Vergleich der Ergebnisse der beiden Modelle und ihr ist zu entnehmen, daß - im Fall ebenen Bodens - die Unterschiede zwischen dem entkoppelten und dem vollständigen Modell nur unwesentlich sind.

Tabelle III.2 Vergleich der Ergebnisse der beiden Modelle für die (1,0)-Schwingung bei $f=1.07_{10}-4 \text{ sec}^{-1}$.

Gitterpunkt- anzahl in Längsrichtung	Eigenfrequenzen (sec^{-1})			
	Entkoppeltes Modell		Gekoppeltes Modell	
	A-Gitter	B-Gitter	A-Gitter	B-Gitter
31	$1.5871_{10}-5$	$1.6048_{10}-5$	$1.5867_{10}-5$	$1.6045_{10}-5$
51	$1.5964_{10}-5$	$1.6003_{10}-5$	$1.5962_{10}-5$	$1.5999_{10}-5$
81	$1.5992_{10}-5$	$1.5999_{10}-5$	$1.5989_{10}-5$	$1.5996_{10}-5$

In Abb.III.5 sind für das "rechte Viertel" des (5x1)-Rechtecks die Stromellipsen der (1,0)-Schwingung bei $f=1.07_{10}-4 \text{ sec}^{-1}$ gezeichnet. Man erkennt den dominierenden Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die internen Schwingungen des Beckens. Da die gewählten Parameter annähernd für Bodensee-Verhältnisse stehen, ist ein ähnlich starker Einfluß der Erdrotation auf die realen internen Schwingungen des Bodensees zu erwarten.

Abb.III.5 Ausschnitt der Stromellipsen der (1,0)-Schwingung des zweigeschichteten (5x1)-Rechtecks mit "Bodensee-Parametern". ($\epsilon=5.3_{10}-4$, $h_1=30\text{m}$, $h_2=70\text{m}$, $L=60\text{km}$, $B=12\text{km}$).



III.2 Eigenfunktionen eines zweigeschichteten (5x1)-Rechtecks mit parabolischem Boden

Um den Einfluß eines variablen Bodenprofils auf die Eigenschwingungen eines zweigeschichteten Beckens untersuchen zu können, bedarf es der Lösung der (gekoppelten) Gleichungen (I.13). Mit dem vorliegenden Modell wird zum ersten Mal dieses vollständige System der beschreibenden Gleichungen gelöst. Anhand der hiermit ermittelten Ergebnisse ergibt sich die Möglichkeit, die Lösungen, die das Problem durch Einführung der konstanten Äquivalenztiefe zu umgehen versuchen, auf ihre Brauchbarkeit zu überprüfen.

Die meisten der in der Einleitung angesprochenen Verfahren zur Ermittlung der Eigenschwingungen eines barotropen natürlichen Wasserbeckens berücksichtigen variable Bodentopographie und sind damit in der Lage, das System (I.21) - zumindest formal - bei variabler Äquivalenztiefe ($h_e = h_e(x,y)$) zu lösen. Sieht man einmal ab von der prinzipiellen Unmöglichkeit der exakten Entkopplung von barotroper und barokliner vertikaler Eigenfunktion im Fall unebenen Bodens, so ist noch nichts ausgesagt über die Größe des Fehlers, der begangen wird, wenn man - auch im Fall unebenen Bodens - die Gleichungen (I.21) als gültig für die barokline Bewegung eines Äquivalenztiefen-Modells ansieht. Durch den Vergleich der so erhaltenen Ergebnisse mit denen des vollständigen (gekoppelten) Modells können die Grenzen aufgezeigt werden, die der Behandlung des vorliegenden Problems mit einem Äquivalenztiefen-Modell mit $h_e = h_e(x,y)$ gesetzt sind.

Die horizontalen Dimensionen des (5x1) - Rechtecks sind die gleichen wie die im Abschnitt III.1.3. Außer den in Abb.III.4 und Tabelle III.2 dargelegten Ergebnissen für die (1,0)-Schwingung bei $f = 1.07_{10} \cdot 4 \text{ sec}^{-1}$ werden weitere 5 Ordnungen für den Fall ebenen Bodens bei diesem Coriolisparameter ($f = 1.07_{10} \cdot 4 \text{ sec}^{-1}$) berechnet. Die Eigenfrequenzen der ersten 6 Ordnungen sind in Tabelle III.3 in der Spalte mit ΔH aufgeführt.

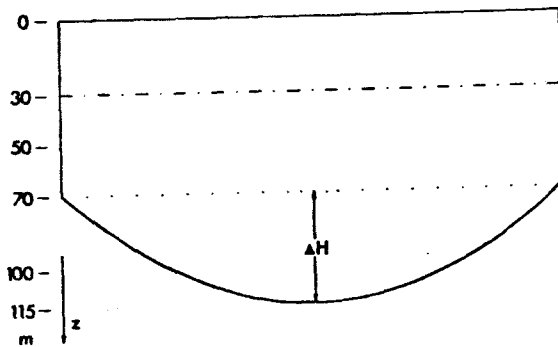


Abb.III.6 Die Tiefenverteilung des (5x1)-Rechtecks in Querrichtung an der Stelle $x=LL/2 \cdot \Delta x$.

Die Tiefenverteilung des (5x1)-Beckens wird verändert, indem nun ein in x- und y-Richtung parabolisches Bodenprofil gemäß

$$H(x,y) = H_0 + \Delta H \left(\frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \right) \left(\frac{4y}{B} - \frac{4y^2}{B^2} \right) \quad (\text{III.4})$$

vorgegeben wird. Abb.III.6 zeigt ein Querprofil der Tiefenverteilung ($\Delta H=45\text{m}$). Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Tabelle III.3 festgehalten.

Tabelle III.3 Die Eigenfrequenzen (10^{-5}sec^{-1}) der ersten sechs Ordnungen eines (5x1)-Rechtecks bei $f=1.07_{\pm 4} \text{sec}^{-1}$ bei verschiedenen (parabolischen) Bodenprofilen. Die Bedeutung von ΔH ist Abb.III.6 zu entnehmen.

Ordnung	1	2	3	4	5	6
ΔH						
0	1.5989	3.1910	4.7691	6.3245	7.8453	9.3203
3	1.5944	3.1812	4.7548	6.3052	7.8213	9.2918
9	1.5853	3.1619	4.7248	6.2649	7.7709	9.2319
24	1.5608	3.1081	4.6412	6.1514	7.6285	9.0618
45	1.5225	3.0172	4.4964	5.9525	7.3758	8.7569

In Abb.III.7 sind die relativen Abweichungen der Lösungen des Modells mit konstanter Äquivalenztiefe, $h_e = \bar{h}_e = \text{const}$, bzw. des Modells mit variabler Äquivalenztiefe, $h_e = h_e(x,y)$, von den "exakten" Lösungen des Modells, das die Kopplung zwischen Horizontal- und Vertikalbewegung berücksichtigt, dargestellt.

Bezugspunkte sind jeweils die Eigenfrequenzen ω_n^G , die sich bei den verschiedenen Tiefenverteilungen mit dem gekoppelten Modell ergeben. Diese wiederum sind der Tabelle III.3 zu entnehmen. Man erkennt, daß die Ergebnisse des Modells mit variabler Äquivalenztiefe durchweg näher an den Lösungen des gekoppelten Modells liegen als sie dies bei konstanter Äquivalenztiefe tun. Diese Aussage trifft bei den höheren Ordnungen der Eigenschwingungen verstärkt zu. Zu erklären ist diese Tendenz damit, daß die immer kleinskaligeren Strukturen der Eigenvektoren immer mehr die lokalen Tiefenverhältnisse innerhalb des Beckens "fühlen". Diese lokalen Tiefenverhältnisse werden durch die variable Äquivalenztiefe zweifellos besser erfaßt als durch die mittlere, konstante Äquivalenztiefe. Der Fehler, den man begeht, wenn man trotz variablen Bodens die Separation zwischen barotroper und barokliner Bewegung durchführt, kommt erst bei größeren Bodenunebenheiten zur Geltung, verliert aber bei den höheren Ordnungen zunehmend an Bedeutung.

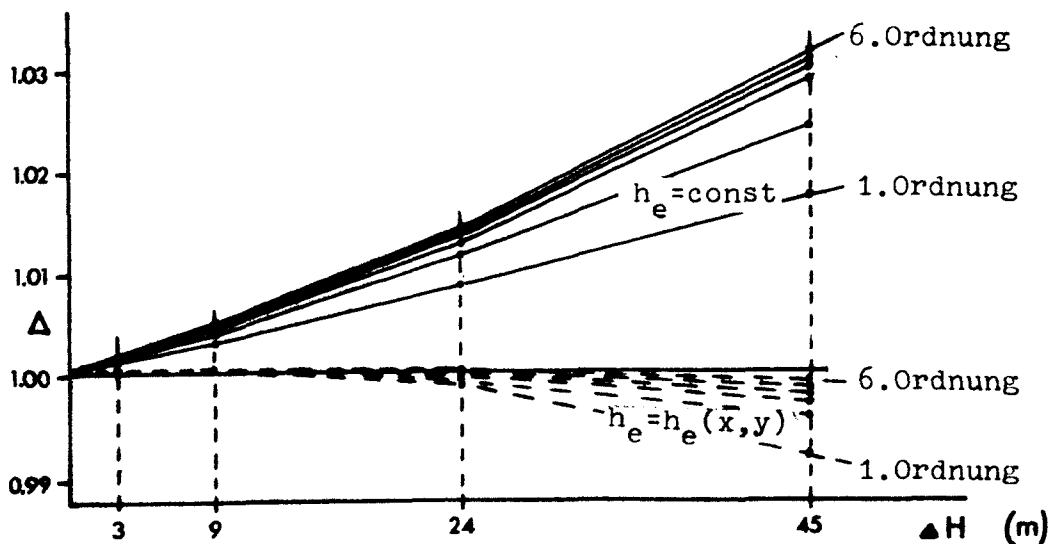


Abb. III.7 Die relativen Abweichungen Δ von den Lösungen des vollständigen Modells, — bei $h_e = \bar{h}_e = \text{const}$, - - - bei $h_e = h_e(x, y)$; Bezugspunkte sind die "exakten" Lösungen des vollständigen Modells (weitere Erklärungen siehe Text).

III.3 Becken mit unregelmäßiger Berandung (Bodensee mit Rao-Gitter)

Es lag nahe, als ersten Test für ein Becken mit unregelmäßiger Berandung die Rechnungen von Rao (in Hollan et al (1980)) nachzuvollziehen, da mir erfreulicherweise die Tiefenverteilung, die den Raoschen Rechnungen zugrunde liegt, zur Verfügung stand. Rao wendet für die Berechnung der barotropen Eigenschwingungen des Bodensees eine vereinfachte Version des in Rao and Schwab (1976) beschriebenen Verfahrens an, die sich bei Nichtberücksichtigung des Coriolisparameters ergibt. Diese Vereinfachung läßt sich rechtfertigen durch einen Vergleich der Deformationsdistanz c/f , die sich bei einer mittleren Wassertiefe von 100 m zu ungefähr 290 km ergibt, mit der größten Horizontalausdehnung des Bodensees von 62 km Länge. (Abschnitt III.3.2 wird die Unterschiede von Ergebnissen mit $f=0$ bzw. mit $f \neq 0$ auch quantitativ fassen). Abb.III.8 zeigt das numerische Gitter, das ich im folgenden als Rao-Gitter ansprechen werde. Im allgemeinen Fall liegen auf den Ecken und in der Mitte der Quadrate Punkte, an denen die Auslenkungen berechnet werden, auf den Mitten der Quadratseiten werden die Komponenten der Horizontalströmung berechnet.

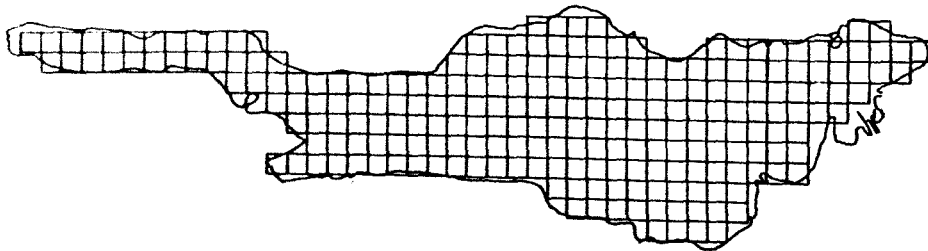


Abb.III.8 Das numerische Gitter des Bodensees (Rao-Gitter).

III.3.1 Vernachlässigung des Einflusses der Erdrotation ($f=0$)

Bei Nichtberücksichtigung der Erdrotation liegt wieder der in Abschnitt II.1 beschriebene Fall zweier völlig entkoppelter Gitter mit ihren voneinander unabhängigen Lösungen vor. In Abb.III.9 sind die Ausschnitte der Gitter über dem Überlinger See gezeichnet. Man erkennt, daß das B-Gitter (wie in Abschnitt II.1 ausführlich beschrieben) keine Randpunkte explizit mit berücksichtigt (implizit gehen die verschwindenden Normal-Transporte ein).

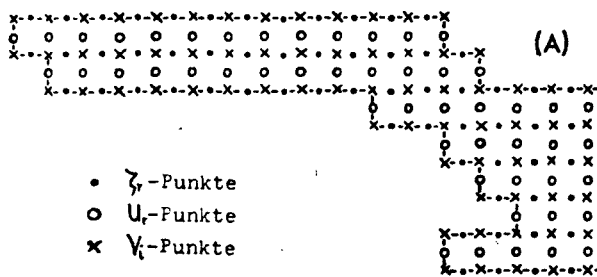


Abb.III.9 Die bei $f=0$ entkoppelten Gitter (ausschnittsweise über dem Überlinger See gezeichnet); (A) das A-Gitter, (B) das B-Gitter.

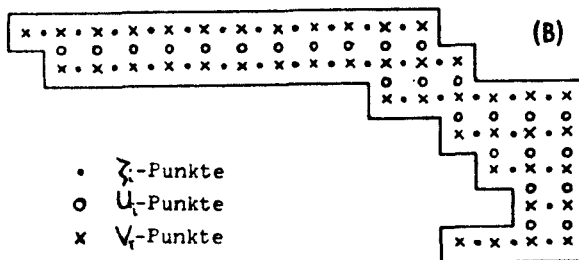


Tabelle III.4 zeigt Ergebnisse der beiden Gitter im Vergleich mit Lösungen von Rao (in Hollan et al (1980)), von Hamblin (in Hamblin and Hollan (1978)) und von Wübbler (pers. Mitt.) sowie mit Beobachtungen (aus Hollan et al (1980)). Es ist augenfällig, daß die Ergebnisse des B-Gitters identisch mit denen Raos sind. Die Eigenperioden des A-Gitters liegen durchweg höher als die des B-Gitters. Das läßt sich leicht erklären, wenn man die mittleren Tiefen betrachtet: Für das A-Gitter berechnet sich die mittlere Tiefe zu $H_m^A = 102.78$ m. Für das B-Gitter ergibt sich ein größerer Wert für die mittlere Tiefe, da hier die Randtiefen nicht berücksichtigt werden.

Tabelle III.4 Perioden der ersten vier Eigenschwingungsordnungen der beiden Gitter als auch der Berechnungen von Rao, Hamblin und Wübbler sowie von Beobachtungswerten. (Perioden in Minuten).

Ordnung	1	2	3	3a	4
A-Gitter	58.15	40.98	31.01	25.90	21.72
B-Gitter	53.83	35.95	27.01	-	19.83
Rao (1980)	53.87	35.96	27.03	-	19.84
Hamblin (1978)	53.4	35.7	27.2	-	19.4
Wübbler (p.M.)	55.8	39.0	28.2	-	19.8
Beobachtungen	55.64	37.72	28.28	-	19.13

In Abb.III.10 sind die Oberflächenauslenkungen der in Tabelle III.4 aufgeführten Eigenschwingungen aufgezeichnet. Wieder ist festzustellen, daß die mit dem B-Gitter berechneten Lösungen (B1, B2, B3) identisch sind mit den Eigenvektoren der Raoschen Rechnungen in Hollan et al (1980). Während sich für die 1.Ordnung die Struktur der Oberflächenauslenkungen zwischen den beiden Gittern nicht wesentlich unterscheidet, ist schon bei der 2.Ordnung (im östlichen Teil des Sees) eine Abweichung zwischen den beiden Lösungen zu erkennen. Die großen Amplituden der 3.Ordnung in der Konstanzer Bucht werden von Hollan et al (1980) als unrealistisch angesehen, da beim B-Gitter in der Konstanzer Bucht lediglich zwei Punkte mit Tiefenangaben vorliegen (siehe Abb.III.9b) und somit eine zu grobe Approximation der Bucht vorzuliegen scheint. Ein Blick auf die Amplitudenverteilung der 3.Ordnung beim A-Gitter (A3) zeigt aber, daß die relative Bedeutung der Auslenkungen der Konstanzer Bucht eher noch größer ist als beim B-Gitter - und dies bei einer wesentlich besseren Erfassung der Tiefenverteilung in der Bucht (siehe Abb.III.9a). Die mit 3a indizierte Eigenschwingung ergibt sich nur als Lösung auf dem A-Gitter. Die in Abb.III.11 dargestellte Amplitudenverteilung der Oberflächenauslenkung weist sie als Schwingung aus, die ihre maximalen Auslenkungen in der Fussacher Bucht und in der Konstanzer Bucht hat. Dabei ist es von großer Bedeutung, wie die Tiefenverteilung dieser beiden Buchten erfaßt wird: eine

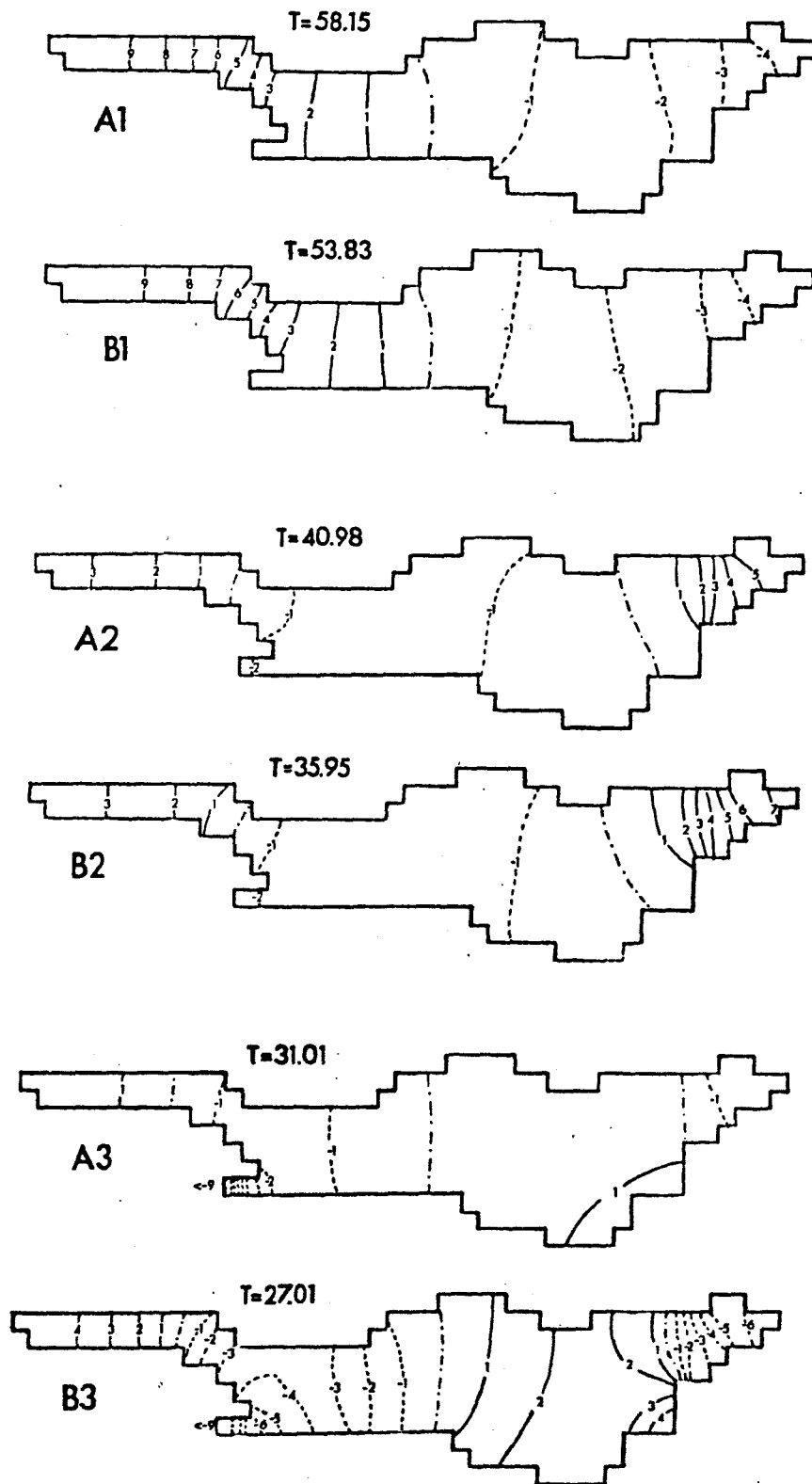


Abb.III.10 Die Oberflächenauslenkungen der ersten drei Ordnungen berechnet mit dem A-Gitter (A1, A2 und A3) und mit dem B-Gitter (B1, B2 und B3). Perioden in Minuten.

Vertiefung der flachen Stellen des Gitters, denen ein Tiefenwert von weniger als 5 m zugewiesen ist, auf 5 m Tiefe bewirkt nämlich ein Verschwinden dieser Eigenschwingungsordnung.

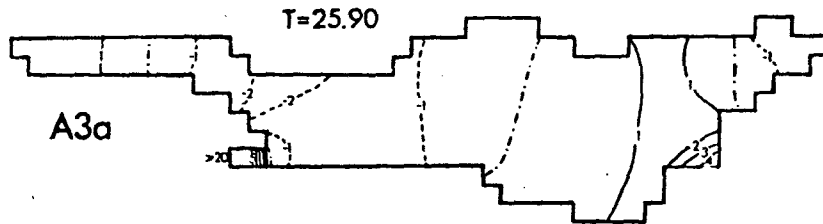


Abb.III.11 Die Ordnung 3a des A-Gitters. Periode in Minuten.

Eine abschließende Interpretation der Wasserstandsspektren der Meßstationen am Bodensee, die auf dem Beobachtungsmaterial von Mühleisen und Kurth (1978) beruhen und bei Hollan et al (1980) dargestellt sind, scheint erst mit Berechnungen möglich zu sein, die mit einem feineren Gitter als dem vorliegenden durchgeführt werden.

Weiterhin ist zu bemerken, daß es nicht angebracht ist, Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung allein auf nichtlineare bzw. Reibungs-Effekte zurückführen zu wollen. Angesichts der aufgezeigten Unterschiede, die die unterschiedliche Tiefenauflösung mit derart groben Gittern beinhaltet, ist dies ein verfrühter Schluß. Tabelle III.4 ist zu entnehmen, daß die Wübberschen Berechnungen - allein aufgrund der Benutzung eines feineren Gitters ($\Delta x = \Delta y = 250$ m) - erheblich bessere Übereinstimmung mit den beobachteten Werten ergeben.

III.3.2 Der Einfluß der Erdrotation ($f \neq 0$)

Die Rechnungen unter Berücksichtigung der Erdrotation werden einerseits durchgeführt, um die Vermutung zu verifizieren, daß der Bodensee mit einer maximalen Ausdehnung von 62 km zu klein ist als daß ein signifikanter Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die Oberflächen-Schwingungen bemerkt werden könnte. (Ein Vergleich der Ergebnisse zweier grundlegend verschiedener numerischer Verfahren wie das Raosche (ohne f) bzw. das Hamblinsche (mit f) liefert keine schlüssigen Aussagen).

Tabelle III.5 Die Eigenfrequenzen (sec^{-1}) der ersten beiden Ordnungen des A-Gitters mit und ohne Berücksichtigung der Erdrotation.

A-Gitter	$f = 0$	$f = 1.07_{10}^{-4}$
1.Ordnung	1.798057_{10}^{-3}	1.798052_{10}^{-3}
2.Ordnung	2.542549_{10}^{-3}	2.542538_{10}^{-3}

Tabelle III.5 ist zu entnehmen, daß im Falle der Oberflächen-Seiches, mit der Schwerkraft als rücktreibender Kraft, der Einfluß der Erdrotation verschwindend klein ist.

Andererseits werden für den barotropen Fall Rechnungen unter Berücksichtigung von f durchgeführt, um erste Einblicke in das Phänomen der Schwingungen 2.Art des Bodensees zu bekommen. Es soll nicht Thema dieser Untersuchungen sein, zu klären, ob diese Schwingungsart für den Bodensee von praktischem Interesse ist, ob und wie sie angeregt werden kann. Es sei also dahingestellt, ob sie, wie es in Rao and Schwab (1976) für die Großen Seen Nordamerikas vermutet wird, für den hohen Energieanteil des niederfrequenten Teils der Spektren verantwortlich ist. Allerdings ist es unumgänglich, ihnen bei den Berechnungen der Eigenfrequenzen des zweigeschichteten Sees große Beachtung zu schenken, überlappen sich doch die Frequenzbereiche der internen Seiches mit dem Frequenzbereich der Schwingungen 2.Art, so daß ein Überblick darüber, welche Eigenfrequenzen den Schwingungen 2.Art zuzuordnen sind, äußerst nützlich ist. Aus Tabelle III.6

erkennt man, daß die Schwingungen 2.Art nur im Bereich oberhalb der Trägheitsperiode (für den Bodensee 16.3 h) auftreten, sich aber mit zunehmender Periode häufen.

Tabelle III.6 Die zehn kürzesten Perioden von Schwingungen 2.Art des Bodensees.

23.78 h	37.21 h
24.22 h	39.57 h
31.28 h	40.30 h
32.56 h	40.97 h
34.16 h	41.85 h

IV. BAROKLINE EIGENSCHWINGUNGEN DES BODENSEES

Die bisher gebräuchlichen numerischen Modelle, mit denen die internen Eigenschwingungen eines zweigeschichteten natürlichen Beckens berechnet wurden und bei denen bezüglich der Randkonfiguration keine idealisierenden Annahmen (Rechteck, Kreis, Ellipse) gemacht werden (Schwab 1977, Kanari 1975), gehen von konstanter Äquivalenztiefe aus und machen dann Gebrauch von der in Abschnitt I.3 vorgestellten Möglichkeit der Separation in barotrope und barokline vertikale Eigenfunktion. In diesem Falle wird - wie das auch in Abschnitt IV.1 geschehen wird - das Gitter des barotropen Falls benutzt und lediglich eine konstante Äquivalenztiefe (berechnet nach $h_e = h_1 \bar{h}_2 / (h_1 + \bar{h}_2)$ aus der mittleren Tiefe) statt der aktuellen Tiefe eingesetzt. Dieses Vorgehen kann bei vielen Seen dazu führen, daß Sprungschichtauslenkungen (und natürlich auch Strömungen in der Unterschicht) berechnet werden für weite Teile dieser Seen, die in natura flacher sind als die Gleichgewichtslage der Sprungschicht. Ein frappierendes Beispiel hierfür sind die Ergebnisse von Kanari (1975) für den Lake Biwa.

Über den Bodensee läßt sich sagen, daß er verhältnismäßig tief ist. Dennoch gibt es auch hier, vorallem im östlichen Teil des Sees, größere Gebiete mit geringen Tiefen. Dies wird verdeutlicht, wenn man den Tiefenbereich zwischen 20 m und 30 m besonders hervorhebt, wie das in Abb.IV.1 geschehen ist.

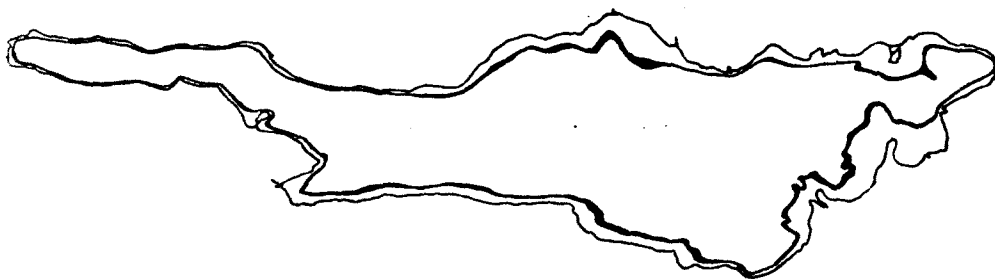


Abb.IV.1 Die Uferlinie und der Bereich zwischen 20 m und 30 m beim Bodensee.

In Abb.IV.2 ist skizziert, welche Möglichkeiten es gibt, diese Randgebiete zu behandeln.

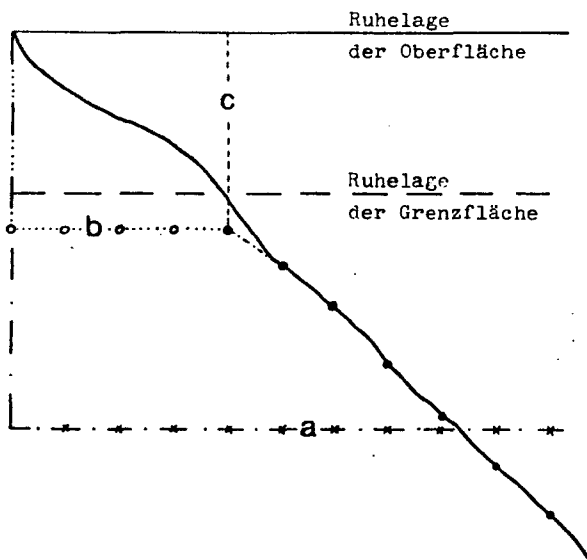


Abb.IV.2 Möglichkeiten
der Behandlung des
flachen Uferbereichs.

- a) Bisher ist es gebräuchlich (Schwab 1977, Kanari 1975), die Uferlinie als Berandung des Modellbeckens zu betrachten, die mittlere Tiefe zu berechnen und daraus eine konstante Äquivalenztiefe abzuleiten. Daraus resultiert der in Abb.IV.2 strichpunktierter Verlauf. Die Rechnungen des Abschnitts IV.1 basieren auf diesem Vorgehen.
- b) Mit derselben Uferlinie (und damit mit demselben Gitter) lässt sich die Bodentopographie unterhalb der Sprungschichttiefe realistisch erfassen; die Tiefen kleiner als die Mittellage der Grenzfläche müssen in diesem Fall (wie in Abb.IV.2 durch den gepunkteten Verlauf angedeutet) vertieft werden auf einen Wert größer als die Sprungschichttiefe. Die Problematik dieses Vorgehens in flachen, breiten Uferzonen ist offensichtlich. In Abschnitt IV.2 wird ein anschauliches Beispiel dafür gegeben.
- c) Der verbleibenden Möglichkeit (gestrichelt in Abb.IV.2) liegt die Schnittlinie zwischen Grenzfläche und Bodentopographie zugrunde: der Rand des Gitters wird bestimmt durch diese Schnittlinie. Dabei wird der Beitrag der Wassermassen des flachen Bereichs oberhalb der Mittellage der Sprungschicht auf die internen Eigenschwingungen außer acht gelassen. Dennoch scheint dieser Schnitt zwischen der Grenzfläche und dem Boden der angebrachte Repräsentant für die "Uferlinie" des Zweischichten-Modells zu sein. Das Gitter des Abschnitts V.4 über dem Überlinger See kommt auf diese Weise zustande (siehe Abb.V.11).

IV.1 Konstante Äquivalenztiefe

Zur Lösung des Problems der baroklinen Eigenschwingungen des zweigeschichteten Bodensees bei konstanter Äquivalenztiefe wird dieselbe Methode angewandt, die schon bei den barotropen Eigenschwingungen des homogenen Einschichten-Modells des Bodensees (Abschnitt III.3) benutzt wurde. Damit ist die Möglichkeit gegeben - bei vertretbarem Rechenzeitaufwand - grundlegende Aussagen über das prinzipielle Verhalten des zweigeschichteten Bodensees herzuleiten. Ein wesentlicher Unterschied zu den Berechnungen des Abschnitts III.3 besteht darin, daß jetzt der Einfluß der Erdrotation ein bestimmender Faktor ist, während er sich für den barotropen Bodensee als bedeutungslos erwiesen hatte. Im barotropen Fall war f/ω_0 , das Verhältnis des Coriolisparameters f zur Kreisfrequenz der rotationsfreien Eigenschwingung 1.Ordnung, mit einem Wert von ungefähr 0.05 sehr klein. Im baroklinen Fall erhält man Werte, die im Bereich 5-7 liegen, so daß man - wie schon bei den Testrechnungen des Abschnitts III.1.3 - mit einem starken Einfluß der Erdrotation auf die Schwingungsform rechnen muß.

Die Rechnungen werden mit demselben Gitter wie in Abschnitt III.3 durchgeführt (siehe z.B. Abb.III.8). Die Deckschichttiefe wird mit 30 m, die Unterschichttiefe mit 70 m angenommen, was eine Äquivalenztiefe von $h_e = 21$ m ergibt. Der Dichteunterschied zwischen Deckschicht und Unterschicht wird mit $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 = 5.3 \cdot 10^{-4} \text{ g cm}^{-3}$ angesetzt (siehe dazu die Bemerkungen am Ende des Abschnitts). Das ergibt einen Wert für die reduzierte Schwerkraft von $g^* = g \frac{\Delta \rho}{\rho_2} = 0.52 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$. Die Indizierung der Ordnungen geschieht nach der Folge der Eigenfrequenzen des rotationsfreien Falls. Das bietet sich an, da ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Eigenschwingungen des rotationsbehafteten mit denen des rotationsfreien Falls besteht.

Abb.IV.3 zeigt die Änderungen der Eigenfrequenzen der ersten 15 Ordnungen bei Steigerung der Rotationsgeschwindigkeit. Eine ähnliche Betrachtung existiert durch die schon in Abschnitt III.1.3 erwähnte Untersuchung über ein zweigeschichtetes (5x1)-Rechteck (Rao 1977). Die Raoschen Rechnungen zeigen, daß bei hohen Rotationsgeschwindigkeiten das Frequenzspektrum sich in zwei verschiedene Typen von Eigenschwingungen

unterteilen läßt: Der eine Typ von Eigenschwingungen hat Frequenzen, die unterhalb der Trägheitsfrequenz liegen, und die Struktur seiner Eigenvektoren ist gekennzeichnet durch eine wachsende Anzahl positiver Amphidromien. Der andere Typ von Eigenschwingungen hat Frequenzen nahe der Trägheitsfrequenz, aber immer größer als diese, und die Struktur ist gegeben

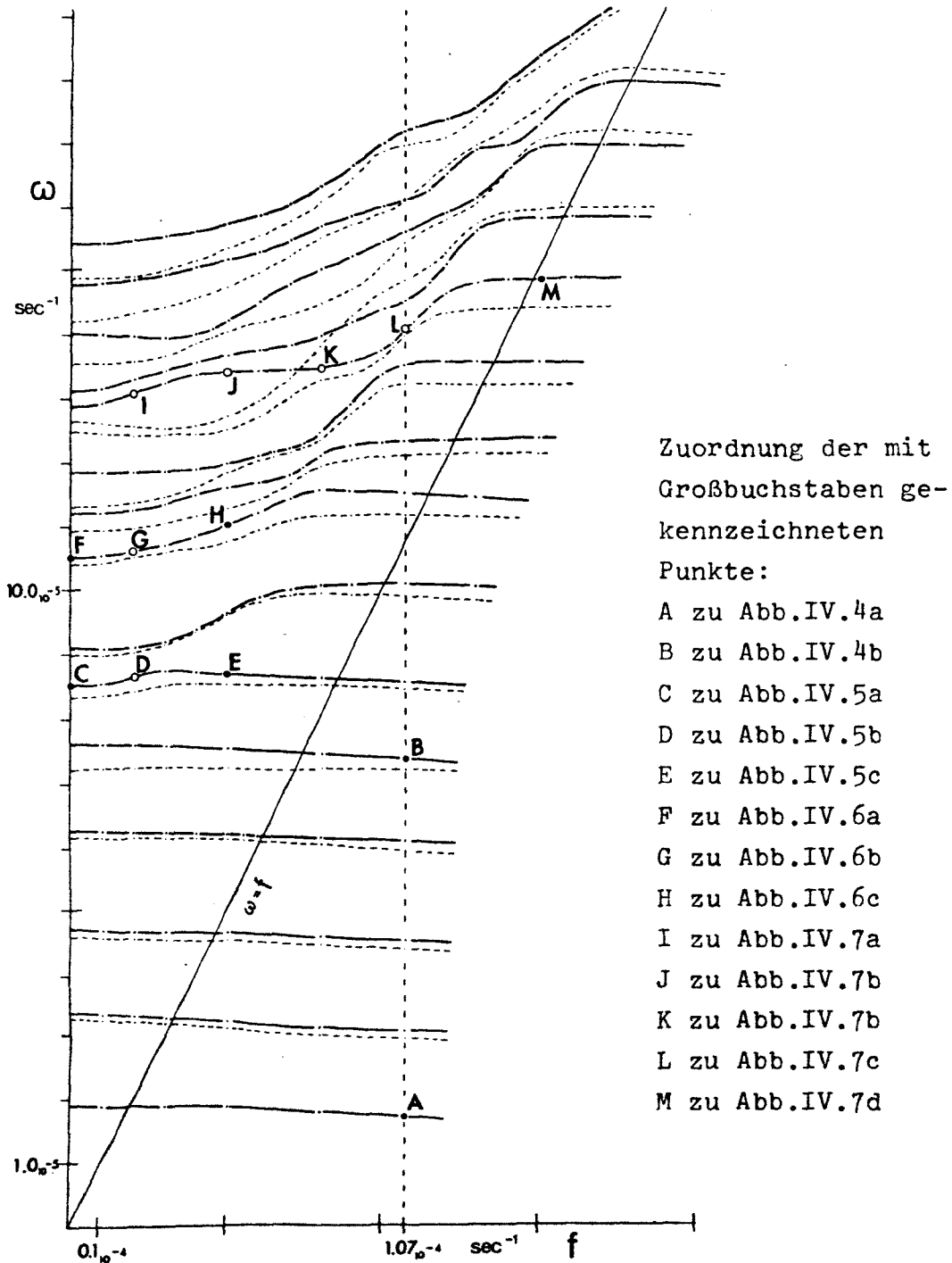


Abb.IV.3 Frequenzverhalten der ersten 15 Ordnungen bei Steigerung der Rotationsgeschwindigkeit. (Gestrichelt gezeichnet sind die dem B-Gitter zuzuordnenden Ergebnisse).

durch eine wachsende Anzahl negativer Amphidromien. Diese Einteilung in zwei Typen kann im vorliegenden Fall nicht so eindeutig vorgenommen werden, weil - zumindest von den hier untersuchten ersten 15 Ordnungen - alle Eigenschwingungen bei hinreichend großen Rotationsgeschwindigkeiten die $\omega=f$ -Linie schneiden, also Frequenzen kleiner als die Trägheitsfrequenz bekommen, und dann aus einem System von durchweg positiven Amphidromien bestehen. Man könnte sagen, daß ein System positiver Amphidromien den stabilen Endzustand jeder Eigenschwingungsordnung bei wachsender Rotationsgeschwindigkeit darstellt. Gleichwohl ist zu beobachten, daß einige der Eigenschwingungen höherer Ordnung im Verlauf ihrer Entwicklung hin zu diesem stabilen Endzustand Zustände durchlaufen, die gekennzeichnet sind durch das Auftreten einer (oder mehrerer) negativer Amphidromien mit großen Auslenkungen.

Natürlich ist es von besonderem Interesse, welche Struktur die Schwingung bei der tatsächlichen Trägheitsfrequenz von $f=1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ hat. Für die Interpretation ist es weiterhin wichtig, zu wissen, wie stabil die Struktur der Schwingung bei $f=1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ ist, wie sie sich also gegenüber einer leichten Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit verhält, oder in welchem Maße sie sich durch geringfügig andere Wahl der Parameter h_e oder ϵ ändert. Da das Verhalten nicht einheitlich ist, ist eine gesonderte Betrachtung der einzelnen Ordnungen nötig.

Tabelle IV.1 Die Eigenperioden der ersten 12 Ordnungen bei $f=0$ und bei $f=1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Perioden in Stunden. Die Werte in Klammern sind die des B-Gitters.

Ord- nung	$f=0$	$f \neq 0$	Ord- nung	$f=0$	$f \neq 0$
1	91.35 (91.77)	103.27 (103.64)	7	19.19 (19.44)	17.34 (17.68)
2	52.11 (53.85)	57.12 (59.51)	8	16.56 (16.77)	15.17 (15.64)
3	37.14 (37.93)	38.83 (40.02)	9	15.55 (15.95)	14.17 (14.44)
4	27.90 (28.43)	28.94 (29.61)	10	14.73 (15.43)	12.92 (13.22)
5	23.00 (24.23)	23.85 (24.38)	11	13.60 (14.02)	12.46 (12.50)
6	20.52 (21.02)	20.51 (20.71)	12	13.34 (13.79)	12.03 (11.74)

Die ersten 5 Ordnungen sind im rotationsfreien Fall ($f=0$) Längsschwingungen, wobei die Anzahl der Knotenlinien der Ordnung entspricht. Jede der Knotenlinien des rotationsfreien Falls wandelt sich bei diesen 5 Ordnungen mit größer werdendem f um in eine Amphidromie. (Abb.IV.4a zeigt dies für die 1.Ordnung, Abb.IV.4b für die 5.Ordnung). Dabei erfahren diese ersten 5 Ordnungen mit größer werdendem f eine leichte Frequenzerniedrigung. Die Werte für $f=0$ und $f=1.07_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ sind Tabelle IV.1 zu entnehmen.

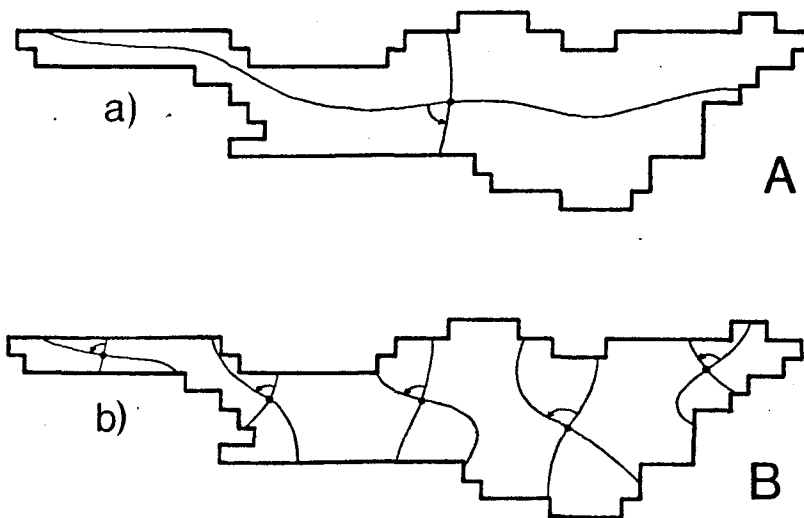


Abb.IV.4 a) Die 1.Ordnung bei $f=1.07_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$,
b) die 5.Ordnung bei $f=1.07_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

Der schwarze Kreis zeigt eine positive Amphidromie an.
Der Drehsinn ist durch den Pfeil angedeutet, ausgehend
von der 0° -Phasenlinie.

Die Eigenschwingung 6.Ordnung, die im rotationsfreien Fall den Charakter einer Querschwingung hat und im Überlinger See keine wesentlich von Null verschiedene Auslenkungen aufweist (siehe Abb.IV.5a), zeigt auch als erste der Eigenschwingungen eine leichte Frequenzerhöhung für wachsendes f . Ab $f \sim 0.3_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ kehrt sich diese Tendenz allerdings um. Entsprechend ist für den Bereich $f < 0.3_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ festzustellen, daß im zentralen Bodensee eine negative Amphidromie mit großen maximalen Auslenkungen existiert (siehe dazu Abb.IV.5b), daß diese Eigenschwingung für diese Rotationsgeschwindigkeiten

also noch den ursprünglichen Charakter einer Querschwingung besitzt. Schon für Werte des Coriolisparameters von wenig mehr als $f=0.3_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ ist der stabile Endzustand von 6 positiven Amphidromien erreicht (siehe dazu Abb.IV.5c).

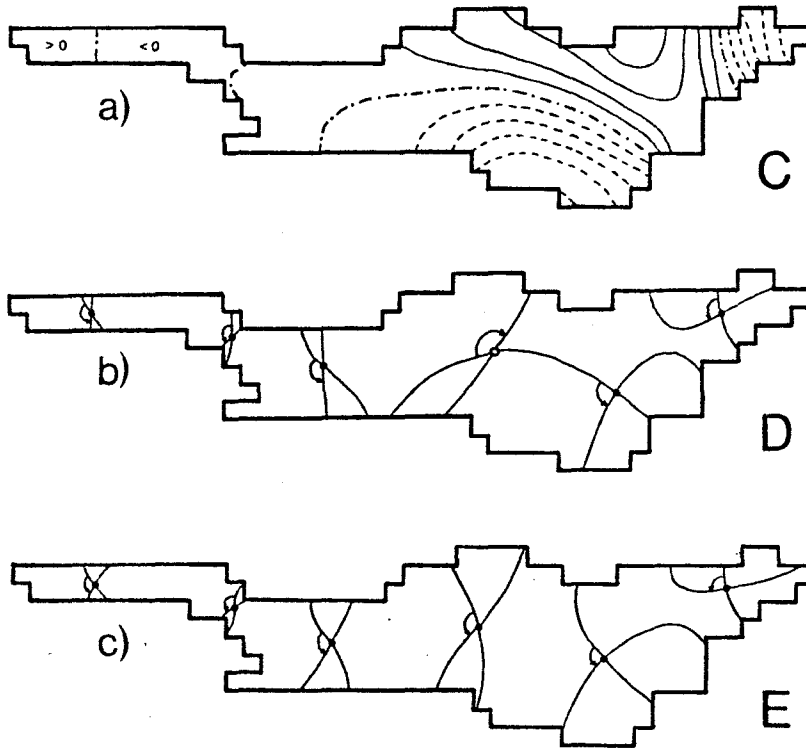


Abb.IV.5 Die 6.Ordnung a) bei $f=0$. Strichpunktierte Linien sind Knotenlinien, gestrichelte Linien sind negativen Werten der Auslenkung zugeordnet. b) Bei $f=0.2_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Der offene Kreis kennzeichnet eine negative Amphidromie. c) Bei $f=0.5_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

Die 7.Ordnung hat ihre wesentlichen Auslenkungen in der Konstanzer Bucht, ist also von untergeordnetem Interesse.

Die 8.Ordnung, die für den rotationsfreien Fall (nach der 6.Ordnung) als zweite den Charakter einer Querschwingung hat (siehe Abb.IV.6a), weist bis $f \sim 0.4_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ zwei negative Amphidromien auf (siehe Abb.IV.6b), "kippt" dann aber in ihrer Struktur zu einem System von 8 positiven Amphidromien (siehe dazu Abb.IV.6c). Dabei nimmt die Eigenfrequenz bis $f \sim 0.8_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ allerdings stetig zu.

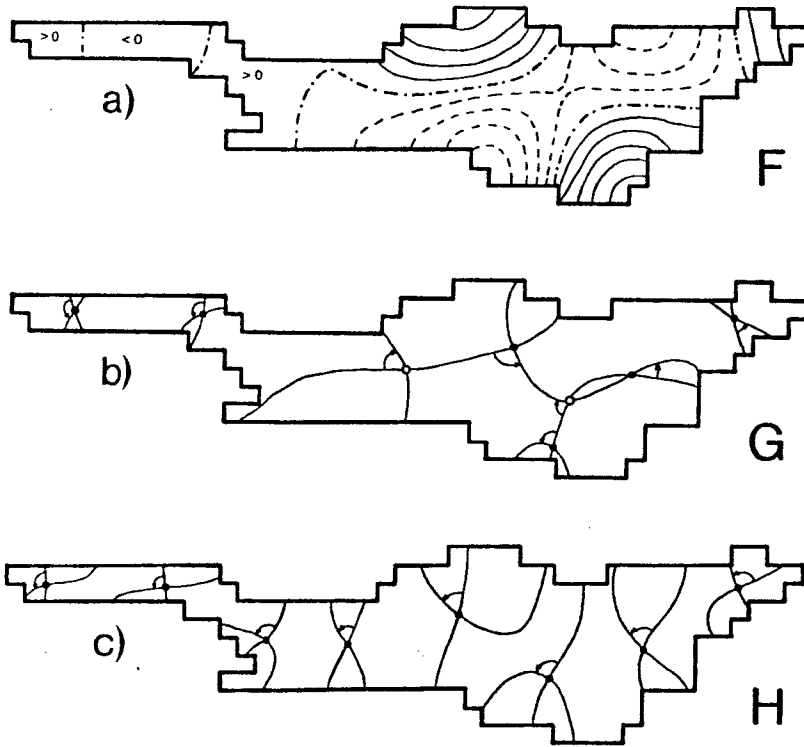
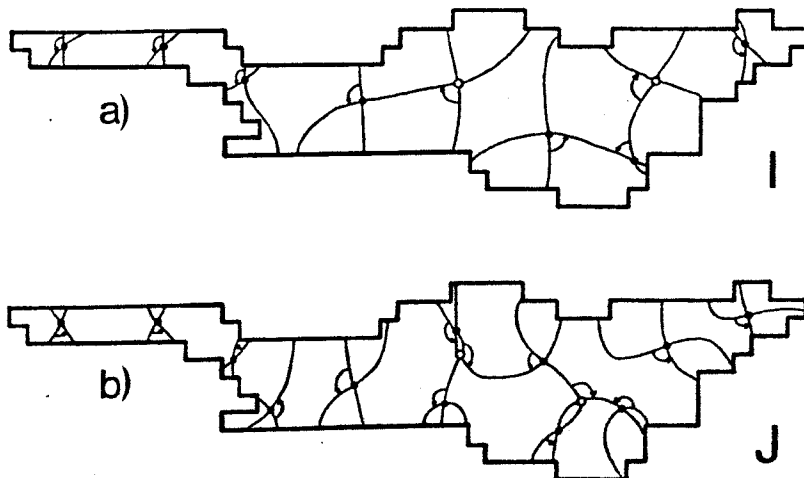


Abb.IV.6 Die 8.Ordnung a) bei $f=0$, b) bei $f=0.2_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$,
c) bei $f=0.5_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$.



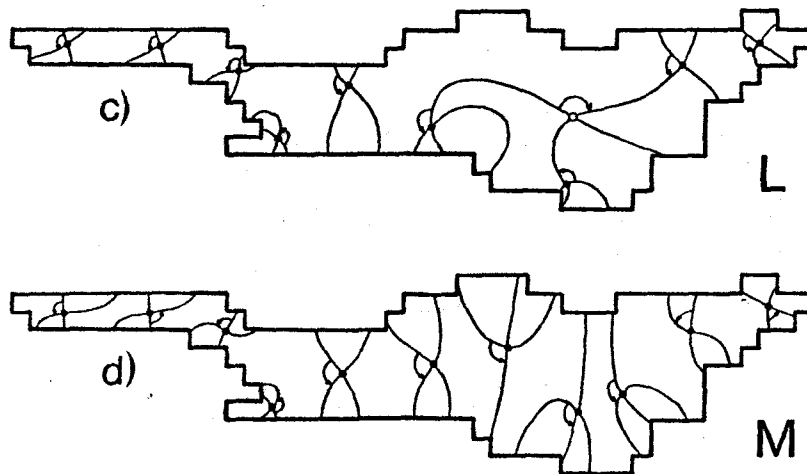


Abb.IV.7 Die 11.Ordnung a) bei $f=0.2_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$, b) bei $f=0.5_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ (nahezu identisch bei $f=0.8_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$), c) bei $f=1.07_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$, d) bei $f=1.5_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

Die Abbildungsfolge IV.7a bis IV.7d zeigt die Entwicklung der Eigenschwingung 11.Ordnung, die als niederste Schwingungsordnung beim realen $f=1.07_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$ noch eine negative Amphidromie aufweist (Abb.IV.7c).

In diesem Zusammenhang sei hingewiesen auf die von Hollan (1974) als Erstem erwähnte antizyklonische Drehbewegung, die sich in den Strömungsregistrierungen der Station $S_2^{\hat{}}$ (siehe Abb.E.1) deutlich ablesen läßt (Hollan 1974, S.177). Die Meßstation $S_2^{\hat{}}$ liegt im Bereich der berechneten negativen Amphidromie. Dies läßt sich nicht sagen von der beobachteten und der berechneten Periode der Schwingung, die sich mit "ungefähr 14 Stunden" (Hollan 1974, S.178) und errechneten 12.46 Stunden deutlich unterscheiden. Diese Diskrepanz zwischen beobachteter und berechneter Periode kann vielerlei Gründe haben, von denen einige (nicht-lineare Effekte, Reibungseinflüsse) außerhalb der Betrachtungsmöglichkeiten des vorliegenden Modells liegen. Im Rahmen einer Beschreibung des Phänomens der internen Eigenschwingungen vermittelt eines Zweischichten-Modells ist die kritische Überprüfung der Wahl der Parameter ϵ , des Dichtedeffekts zwischen Deckschicht und Unterschicht, und h_1 , der Deckschichttiefe, eine vordringliche Aufgabe. Der Zeitraum der

Bodensee-Expedition 1972 erstreckt sich von Ende September bis Ende November, liegt also in der Phase der herbstlichen Abkühlung. Hollan (1974) stellt Betrachtungen über die mittlere Abkühlungsrate bei ruhiger Wetterlage und über die Schichtung nach Starkwind-Ereignissen an. Daraus soll als grobe Abschätzung für ϵ und h_e gefolgert werden, daß zu Ende des Beobachtungszeitraums h_e um 20% zugenommen hat, ϵ sich allerdings auf die Hälfte seines anfänglichen Wertes reduziert hat. Die bei den vorhergehenden Berechnungen gewählten Parameter von $\epsilon=5.3 \cdot 10^{-4}$ und $h_1=30$ m sind für den Zeitraum Anfang Oktober repräsentativ (die in Abschnitt V behandelten internen Querschwingungen des Überlinger Sees fallen in diesen Zeitraum).

IV.2 Berücksichtigung der Bodentopographie

Nach den sehr ausführlichen Untersuchungen des Abschnitts IV.1 über das prinzipielle Verhalten eines Zweischichten-Modells des Bodensees bei konstanter Tiefe sollen in diesem Kapitel einige Ergebnisse vorgestellt werden, die sich mit dem vollständigen (gekoppelten) Modell ergeben:

- a) Die Rechnungen bei ebenem Boden, die mit den selben Werten der Parameter ϵ , h_1 und h_2 durchgeführt werden, die den Berechnungen des Abschnitts IV.1 zugrunde liegen, ergeben die gleichen unwesentlichen Unterschiede zwischen entkoppeltem und gekoppeltem Modell, die schon durch die Ergebnisse des Abschnitts III.1.3.2 belegt sind.
- b) Die im folgenden vorgestellten Berechnungen bei unebenem Boden sind mit dem vertieften Rao-Gitter (siehe Abschnitt III.3) durchgeführt worden und sind - beachtet man die Überlegungen zu Abb.IV.2 - wider besseres Wissen gemacht worden. Der Grund dafür, daß dennoch (einige wenige) Beispiele berechnet wurden, ist in der bequemen Handhabung des vorhandenen Gitters zu sehen. In Abb.IV.8 sind zwei, um ein Viertel der Periode zeitversetzte Momentanbilder der Grenzflächenauslenkung der internen Schwingung 1.Ordnung eines zweigeschichteten Bodensee-Modells aufgezeigt. Diesem Fall liegt das Rao-Gitter zugrunde, bei dem sämtliche Tiefen, die geringer als 35 m sind, auf 35 m vertieft sind (das entspricht dem in Abb.IV.2 gestrichelt gezeichneten Bodenverlauf). Man erkennt, daß in flachen Uferbe-

reichen "Eigentümlichkeiten" auftreten, besonders auffällig zum Zeitpunkt $\omega t = \pi/2$ (Abb.IV.8b) in dem flachen Uferbereich in der Mitte des nördlichen Ufers. Es erscheint zweifelhaft, diese Ergebnisse als realistische Abbilder der wirklichen Vorgänge zu interpretieren, da durch die geringe Unterschichttiefe in diesen ausgedehnten Flachwasserbereichen einige Voraussetzungen der Ausgangsgleichungen nicht mehr erfüllt sein können. Andererseits ist für die tieferen Bereiche des Bodensees die Struktur der Auslenkung der Grenzfläche durchaus plausibel (vergleiche Abb.IV.4a).

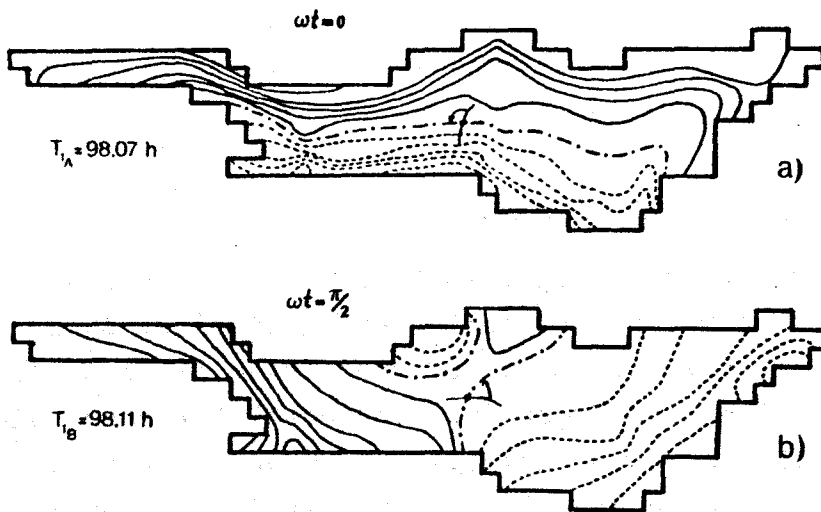


Abb.IV.8 Die Grenzflächenauslenkung der 1.Ordnung bei unebenem Boden (vertieftes Rao-Gitter) a) zum Zeitpunkt $\omega t = 0$, b) zum Zeitpunkt $\omega t = \pi/2$. Die gestrichelten Linien sind negativen Werten zuzuordnen. Mit dem Pfeil ist der Drehsinn angedeutet.

Berechnungen der internen Eigenschwingungen des Bodensees mit einem Gitter, dem die Schnittlinie zwischen Grenzfläche und Boden als "Uferlinie" zugrunde liegt (der Fall c) von Abb.IV.2), werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt. (Siehe aber die Rechnungen des folgenden Abschnitts über die internen Querschwingungen des Überlinger Sees).

V. INTERNE QUERSCHWINGUNGEN DES ÜBERLINGER SEES

Innerhalb der vorliegenden Untersuchungen über Eigenschwingungen zweigeschichteter Becken nehmen die internen Querschwingungen des Überlinger Sees einen gewichtigen Platz ein. Die Gründe dafür sind vielfältig und sollen der Reihe nach erläutert werden: Die Testrechnungen des Abschnitts III zeigen, wie stark die Ergebnisse der Rechnungen von der horizontalen Auflösung des numerischen Gitters, das auf das zu untersuchende Wasserbecken gelegt wird, abhängen. In dem mathematischen Verfahren, das dieser Arbeit zugrunde liegt (siehe Abschnitt II.2), ist die Dimension der zu invertierenden Matrizen innerhalb des Lösungsalgorithmus (II.8)-(II.9) der begrenzende Faktor gegenüber einer fortgesetzten Verfeinerung des Gitters. Die Dimension d dieser Matrizen vergrößert sich beim Einschichten-Modell in dem Maße, wie die maximale Gitterpunktanzahl in Querrichtung zunimmt ($d \sim m$), ist also stark abhängig von der Breite des Sees. Bei Berücksichtigung der Bodentopographie ist auch die Kopplung zwischen barotroper und barokliner Bewegung zu berücksichtigen und damit verdoppelt sich die Anzahl der Punkte gegenüber dem barotropen Modell, vervierfacht sich die Anzahl der Matrix-Elemente. Zwangsläufig kommt man an den Punkt, wo eine "übermäßige" Breite eines Sees als etwas wenig Wünschenswertes erscheint.

Unter der Annahme, daß die internen Querschwingungen des Überlinger Sees weitgehend unbeeinflußt von den Wassermassen des restlichen Bodensees ablaufen, ist es aufgrund der geringen Breite des Überlinger Sees möglich, dieses Phänomen mit einem relativ feinen Gitter zu untersuchen. Es sei unbestritten, daß hier der Wunsch der Vater des Gedankens ist, aber es soll gezeigt werden, daß im Fall des Bodensees bzw. des Überlinger Sees eine Situation vorliegt, wo es möglich ist, aus der Not eine Tugend zu machen.

Noch mehr als für den gesamten Bodensee trifft für den Überlinger See die Aussage zu, daß es sich um einen relativ tiefen See mit steil abfallenden Ufern handelt (siehe z.B. Abb.IV.1), so daß die Schnittlinie der internen Grenzfläche

mit dem Boden (die 30 m-Tiefenlinie) sich nicht sehr stark von der Uferlinie unterscheidet. Der Schnitt quer zum Überlinger See auf Höhe der Verankerung So (siehe Abb.E.1) verdeutlicht diesen Sachverhalt (siehe Abb.V.6).

Da der Behandlung der internen Eigenschwingungen eines natürlichen Beckens mittels eines Zweischichten-Modells die Annahme zugrunde liegt, daß der in der Natur kontinuierlich verlaufende Übergang zwischen warmem, durchmischtem Deckschichtwasser und kaltem Wasser der Unterschicht durch einen Dichtesprung zu beschreiben sei, ist es für die Güte der Simulation der internen Wasserbewegungen wichtig, wie ausgeprägt der Dichtegradient in der Sprungschicht des natürlichen Gewässers ist. Die in Abb.I.1 abgebildete Temperatur- bzw. Dichteschichtung zeigt die Schichtungsverhältnisse, wie sie im Überlinger See typisch für den Herbst sind. Anders als im eigentlichen Obersee spielt der Rheindurchfluß im Überlinger See keine Rolle.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß im Überlinger See die Voraussetzungen, die einem Zweischichten-Modell zugrunde liegen, recht gut erfüllt sind und daß aufgrund seiner geringen Breite die Rechnungen mit einem relativ feinen Gitter durchgeführt werden können.

Inwieweit es gerechtfertigt ist, den Überlinger See als unendlich langen Kanal zu betrachten, um damit die Berechnung der internen Querschwingungen zu vereinfachen, soll in den Abschnitten V.1 - V.3 untersucht werden.

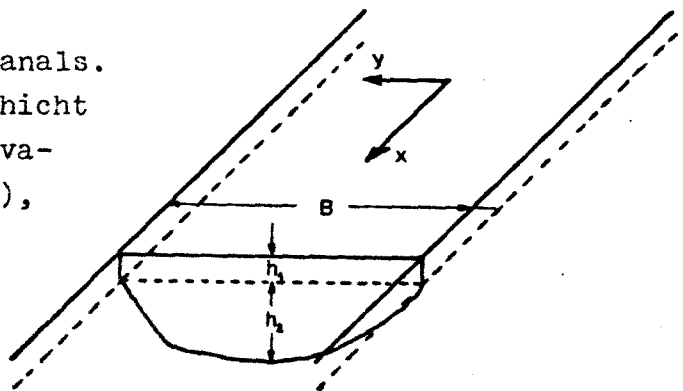
V.1 Die beschreibenden Gleichungen für den unendlich langen Kanal

V.1.1 Die vollständigen Gleichungen

Bei der approximativen Beschreibung von Querschwingungen eines Sees, der bedeutend länger als breit ist und deshalb wie ein unendlich langer Kanal behandelt werden soll, nimmt man

Abb.V.1 Querprofil des Kanals.

Die Tiefe der Unterschicht kann in Querrichtung variabel sein ($h_2=h_2(y)$), die Deckschichttiefe h_1 ist konstant.



verschwindende Gradienten in Längsrichtung an ($\partial/\partial x = 0$, siehe Abb.V.1), man sieht somit auch ab von Effekten, die von den Enden des Sees ausgehen. Unter dieser Voraussetzung reduzieren sich die Gleichungen (I.13) zu

$$i\omega u_1 + f v_1 = 0 \quad , \quad (V.1a)$$

$$i\omega v_1 - f u_1 + g h_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = 0 \quad , \quad (V.1b)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} - i\omega \zeta_1 + i\omega \zeta_2 = 0 \quad (V.1c)$$

und

$$i\omega u_2 + f v_2 = 0 \quad , \quad (V.1d)$$

$$i\omega v_2 - f u_2 + g \delta h_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + g \epsilon h_2 \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0 \quad , \quad (V.1e)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} + i\omega \zeta_2 = 0 \quad . \quad (V.1f)$$

Bei der Trennung von (V.1a)-(V.1f) in Real- und Imaginärteil ergeben sich wiederum zwei voneinander unabhängige, für die Beschreibung des Problems völlig äquivalente Gleichungssysteme. So ergibt sich z.B. (bei Berücksichtigung des Imaginärteils) für die Deckschicht

$$-\omega u_1^i - f v_1^i = 0 \quad , \quad (V.2a)$$

$$-\omega v_1^i - f u_1^i + g h_1 \frac{\partial \zeta_1^i}{\partial y} = 0 \quad , \quad (V.2b)$$

$$-\omega \zeta_1^i + \omega \zeta_2^i - \frac{\partial v_1^i}{\partial y} = 0 \quad (V.2c)$$

und für die Unterschicht

$$-\omega u_2^i - f v_2^i = 0 \quad , \quad (V.2d)$$

$$-\omega v_2^i - f u_2^i + g \delta h_2 \frac{\partial \zeta_1^i}{\partial y} + g \epsilon h_2 \frac{\partial \zeta_2^i}{\partial y} = 0 \quad , \quad (V.2e)$$

$$-\omega \zeta_2^i - \frac{\partial v_2^i}{\partial y} = 0 \quad . \quad (V.2f)$$

Aus (V.2c) bzw. (V.2f) folgt

$$u_1^r = -\frac{f}{\omega} v_1^i, \quad u_2^r = -\frac{f}{\omega} v_2^i \quad (V.3)$$

Damit geht man in (V.2b) bzw. (V.2e) ein und erhält

$$\left(-\omega + \frac{f^2}{\omega}\right) v_1^i + g h_1 \frac{\partial \zeta_1^r}{\partial y} = 0 \quad (V.4a)$$

$$-\omega \zeta_1^r + \omega \zeta_2^r - \frac{\partial v_1^i}{\partial y} = 0 \quad (V.4b)$$

und

$$\left(-\omega + \frac{f^2}{\omega}\right) v_2^i + g \delta h_2 \frac{\partial \zeta_1^r}{\partial y} + g \epsilon h_2 \frac{\partial \zeta_2^r}{\partial y} = 0 \quad (V.4c)$$

$$-\omega \zeta_2^r - \frac{\partial v_2^i}{\partial y} = 0 \quad (V.4d)$$

Durch (V.4a)-(V.4d) hat man ein vollständiges System partieller Differentialgleichungen für die vier Variablen v_1^i , ζ_1^r , v_2^i und ζ_2^r . Dabei ist zu beachten, daß die Kopplung zwischen barotroper und barokliner Bewegung in den Gleichungen enthalten ist.

Die numerische Behandlung des Gleichungssystems (V.4) ist als Spezialfall des in Abschnitt II.2 hergeleiteten Ver-

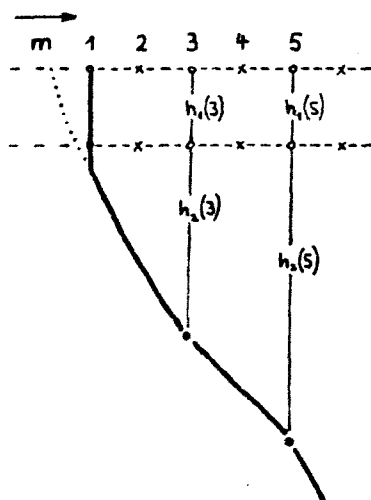


Abb.V.2a Die Anordnung der Gitterpunkte bei V-Punkten auf dem Rand.

$$\zeta_1^r(2) \quad \zeta_1^r(4) \quad v_1^i(3) \quad v_1^i(5) \quad \zeta_2^r(3) \quad \zeta_2^r(5) \quad v_2^i(3) \quad v_2^i(5) \quad \dots$$

$-\omega$	ω	$-\Delta$						
	$-\omega$		$-\Delta$					
$-\gamma_1$		$()$		γ_1				
$-\delta\gamma_1 - \epsilon\gamma_1$			$()$	$\delta\gamma_1 + \epsilon\gamma_1$				
		Δ		$-\omega$	ω	$-\Delta$		
			Δ		$-\omega$		$-\Delta$	
				$-\gamma_2$		$()$	γ_2	
				$-\delta\gamma_2 - \epsilon\gamma_2$			$\delta\gamma_2 + \epsilon\gamma_2$	

Abb.V.2b Das Schema der Koeffizientenmatrix. $\Delta = 1/2\Delta y$, $\gamma_{1,2} = gh_{1,2}/2\Delta y$, $() = -\omega + f^2/\omega$.

wobei zu berücksichtigen ist, daß $V_1(1) = V_2(1) = 0$ und $V_1(M) = V_2(M) = 0$ gilt. Abb.V.3a zeigt die Anordnung der Gitterpunkte, Abb.V.3b das Schema der Koeffizientenmatrix. Die mit diesem Verfahren erzielten Ergebnisse werden in Abschnitt V.2 vorgestellt.

V.1.2 Die Trennung von barotroper und barokliner Bewegung beim unendlich langen Kanal

In Abschnitt I.3 wurde gezeigt, daß dann, wenn die Tiefe nur von einer unabhängigen Variablen abhängig ist (also $h_2 = h_2(y)$ oder $h_2 = h_2(x)$), eine Trennung zwischen barotroper und barokliner Bewegung näherungsweise möglich ist. Die Addition der beiden Kontinuitätsgleichungen (V.1c) und (V.1f) ergibt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial y} (V_1 + V_2) = -i\omega \zeta_1 \quad (V.5)$$

und vernachlässigt man die rechte Seite (in Abschnitt I.3 wurde ausführlich darauf eingegangen), so folgt, daß

$$V_1 + V_2 = \text{const} = 0 \quad \text{oder} \quad V_1 = -V_2 \quad (V.6)$$

Daraus folgt man über (V.1a) bzw. (V.1d), daß

$$U_1 = -U_2 \quad (V.7)$$

Geht man damit in (V.1b) bzw. (V.1e) ein, so erhält man nach Subtraktion der beiden Gleichungen

$$i\omega V_2 - fU_2 = -g \epsilon \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{\partial}{\partial y} (\zeta_2 - \zeta_1) \quad .$$

Berücksichtigt man weiterhin, daß $\zeta_1 \ll \zeta_2$, so erhält man mit

$$i\omega U_2 + fV_2 = 0 \quad , \quad (V.8a)$$

$$i\omega V_2 - fU_2 = -g \epsilon \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \quad , \quad (V.8b)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} + i\omega \zeta_2 = 0 \quad (V.8c)$$

sichtigt, daß die Blockmatrizen nun durch Skalare zu ersetzen sind. (Es handelt sich also um eine nochmalige Vereinfachung des in Abschnitt V.1.1 abgeleiteten Verfahrens. Statt (2x2)-Matrizen stehen nun Skalare). Geschieht die Anordnung der Gitterpunkte wie in Abb.V.2a, so ergibt sich die in Abb.V.4 angedeutete Koeffizientenmatrix. Bei ζ -Randpunkten (wie in Abb.V.3a) ergibt sich die in Abb.V.5 angedeutete Koeffizientenmatrix.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \zeta(1) & V(1) & \zeta(2) & V(2) & \dots & V(1-3) & \zeta(1-3) & V(1-3) & \zeta(1) \\
 -\omega & -2\Delta & & & & & & & \\
 -Y() & Y & & & & & & & \\
 \Delta & -\omega & -\Delta & & & & & & \\
 & -Y() & Y & & & & & & \\
 & & & \dots & & & & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & & & -Y() & Y & \\
 & & & & & \Delta & -\omega & -\Delta & \\
 & & & & & & -Y() & Y & \\
 & & & & & & & & 2\Delta & -\omega
 \end{array}$$

Abb.V.5 Koeffizientenmatrix bei ζ -Randpunkten. Abkürzungen wie in Abb.V.4.

Wieder sei bezüglich der hiermit erzielten Ergebnisse auf Abschnitt V.2 verwiesen.

V.1.3 Analytische Lösungen für den Fall konstanter Äquivalenztiefe

Reduziert man im Fall konstanter Äquivalenztiefe h_e das System (V.10) auf eine einzige Gleichung

$$(-\omega^2 + f^2) V_2 - g e h_e \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = 0, \quad (V.11)$$

so kann man diese Gleichung, zusammen mit den Randbedingungen $V_2 = 0$ für $y = 0$ und $y = B$, analytisch lösen. Die Lösungen dieser Gleichung sind für ebenen Boden ($h_e = \text{const}$) trigonometrische Funktionen mit den Argumenten $\lambda_n y$ und $\omega_n t$, wobei λ_n die transversale Struktur und ω_n die Frequenz der n-ten Eigenschwingung angeben und gegeben sind durch

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{B} \quad , \quad \omega_n^2 = f^2 + f^2 R^2 \lambda_n^2 \quad , \quad n=1,2,3,\dots \quad (V.12)$$

Dabei ist R die interne Deformationsdistanz

$$R = \frac{c}{f} \quad , \quad c \equiv \sqrt{g h_e} \quad .$$

V.2 Ergebnisse für den Überlinger See als unendlich langer Kanal

Nun werden die in den Abschnitten V.1.1 - V.1.3 dargestellten Lösungsmöglichkeiten auf die internen Querschwingungen des Überlinger Sees angewandt. Dabei sollen die Ergebnisse der Reihe nach, ausgehend von der weitestgehenden Vereinfachung (ebener Boden) vorgestellt werden. In Abb.V.6 ist skizziert, wie man sich den unendlich langen Kanal vorzustellen hat, der repräsentativ für den Überlinger See sein könnte. Offensichtlich bedarf es bei der Festlegung der Breite des Kanals und noch mehr bei der Wahl seines Tiefenprofils in Querrichtung einer glücklichen Hand, soll bezüglich der berechneten Eigenperioden eine gute Übereinstimmung mit den beobachteten Werten erhalten werden. Die im folgenden dargestellten Ergebnisse

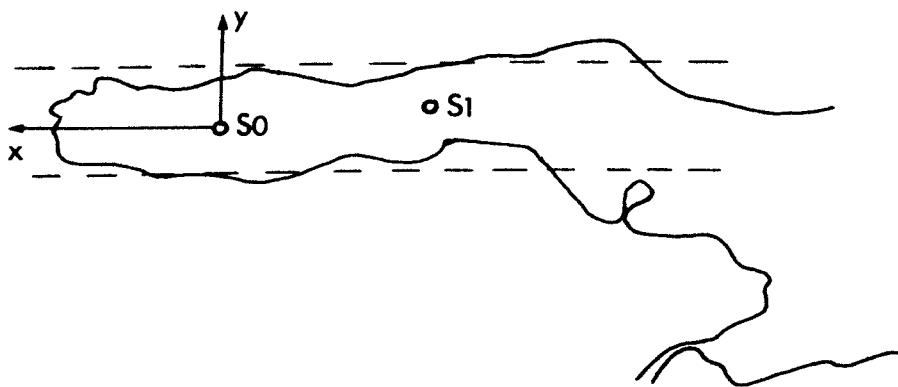


Abb.V.5 Der Überlinger See als unendlich langer Kanal.

gründen sich auf die Verhältnisse, wie sie bei der Meßstation So (siehe z.B. Abb.V.6) vorliegen. In Abb.V.7 ist das Querprofil der Tiefe bei So dargestellt. Die Tangente an den Talweg bei So legt die Richtung des Kanals fest und der Querschnitt der Abb.V.7 liegt folglich senkrecht zum Talweg. Die Breite $B = 2.52$ km, die den Werten der Tabellen V.1 und V.2 zugrunde liegt, wird bestimmt durch die Schnitte der 30 m-Tiefenlinie mit dem Boden. (Die Lage der Grenzfläche in 30 m Tiefe und der Wert des Dichteunterschieds von $\Delta \rho = 5.3_{40} \cdot 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ ergeben sich aus den Schichtungsverhältnissen, wie sie Mitte Oktober 1972 bei der Station So vorlagen (siehe dazu Abb.I.1)). Diese Werte der Parameter h_1 und ϵ ($h_1 = 30 \text{ m}$, $\epsilon = 5.3_{40} \cdot 10^{-4}$) liegen sämtlichen Rechnungen der vorliegenden Arbeit zugrunde). Die gepunktete Linie in Abb.V.7 gibt den Verlauf der Äquivalenztiefe an. Für die mittlere Äquivalenztiefe ergibt sich $\bar{h}_e = 20.0 \text{ m}$. Das entspricht bei einer Deckschichttiefe von $h_1 = 30 \text{ m}$ einer Unterschichttiefe von $h_2 = 60 \text{ m}$.

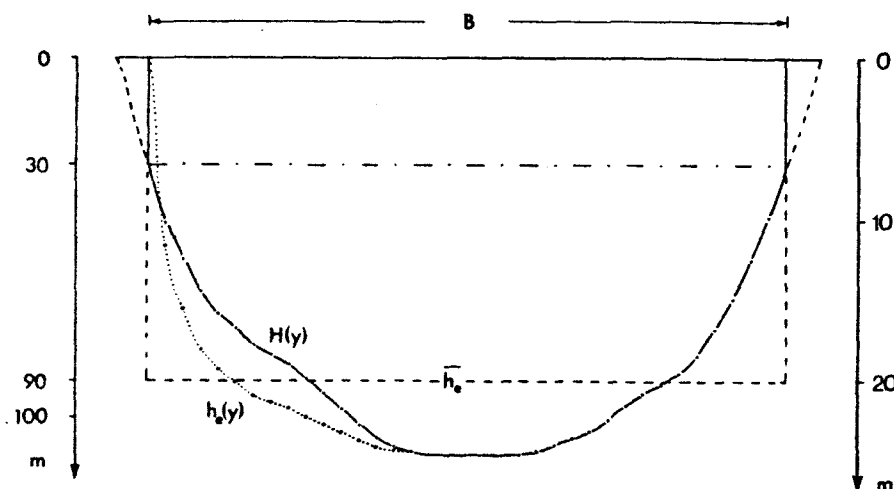


Abb.V.7 Der Querschnitt durch den Überlinger See bei So.
 - - - - - die 30 m-Tiefenlinie, — $H(y)$, ····· $h_e(y)$.
 Der linke Maßstab gilt für H , der rechte für h_e .

V.2.1 Konstante Äquivalenztiefe

Dieser Fall, der analytisch gelöst werden kann, vermittelt einen ersten Eindruck davon, wie groß der Einfluß der ablenkenden Kraft der Erdrotation auf die internen Querschwingungen des Überlinger Sees ist. Dies kann auch über das Verhältnis des Radius des internen Trägheitskreises zur Breite des Sees abgeschätzt werden. Sei $u = 5 \text{ cm/sec}$ eine typische Geschwindigkeit, die bei den internen Querschwingungen vorkommt und $f = 1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ der für den Bodensee gültige Coriolisparameter, so ergibt sich für den Radius des internen Trägheitskreises $R \sim 500 \text{ m}$. Macht man sich nun die Faustregel zu eigen, daß ein See größenordnungsmäßig die Breite von 5 Radien des internen Trägheitskreises haben muß, damit Effekte der Corioliskraft bedeutend werden, und die Breite von 20 Radien, damit die Corioliskraft dominierend wird (Mortimer 1974), so müßte sich bei einer Breite des Überlinger Sees von 2.5 - 3.0 km ein nicht unwesentlicher Unterschied ergeben, je nachdem, ob man die internen Querschwingungen des rotationsfreien oder des rotationsbehafteten Falls betrachtet. Die Gegenüberstellung der Werte in Tabelle V.1 belegt diesen Unterschied. Man erkennt die nach Formel (V.12) zu erwartende Frequenzerhöhung im rotationsbehafteten Fall gegenüber dem rotationsfreien Fall, die mit zunehmender Ordnung allerdings geringfügiger wird.

Tabelle V.1 Die Eigenperioden (in Stunden) der ersten fünf Ordnungen der Querschwingungen des Überlinger Sees bei $h_e = 20 \text{ m}$, $B = 2.52 \text{ km}$, $\epsilon = 5.3_{40} \cdot 10^{-4}$, $f = 0$ bzw. $f = 1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

Ordnung n	1	2	3	4	5
bei $f=0$	4.342	2.171	1.447	1.085	0.868
bei $f \neq 0$	4.195	2.152	1.441	1.083	0.867

Tabelle V.2 zeigt beispielhaft Unterschiede für die ersten beiden Ordnungen, die sich bei leichter Variation des Parameters h_e in Formel (V.12) ergeben. Dabei ist zu beachten, daß z.B. $h_e = 21 \text{ m}$ sowohl durch Vertiefung der Gesamwassertiefe auf 100 m unter Beibehaltung der Sprungschichttiefe von 30 m, als auch durch Absenkung der Sprungschichttiefe auf 32.3 m bei Beibehaltung der Unterschichttiefe von 60 m zu

erreichen ist. Bedenkt man weiter, daß auch die Variation von ϵ oder B im selben Sinne eine Veränderung der Eigenperiode bewirkt (Sensibilitätsbetrachtungen hierzu finden sich bei Mortimer (1953)), so wird die Willkür deutlich, die der Festlegung dieser Parameter im Fall eines natürlichen Beckens und den damit gewonnenen Ergebnissen innewohnt.

Tabelle V.2 Die Eigenperioden (in Stunden) der 1. und 2. Ordnung bei verschiedenen Äquivalenztiefen ($f=1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$).

Äquivalenztiefe (m)	19.0	20.0	21.0	22.0
1.Ordnung	4.297	4.195	4.101	4.012
2.Ordnung	2.207	2.152	2.101	2.053

V.2.2 Variabler Boden, $H=H(y)$

Man kommt der Wirklichkeit zweifellos ein Stück näher, wenn man statt konstanter Tiefe bzw. konstanter Äquivalenztiefe die reale Tiefenverteilung in Querrichtung berücksichtigt. Gleichwohl bleibt die Willkür der Wahl von ϵ , h_1 und auch des repräsentativen Querschnitts. Tabelle V.3 zeigt die ersten fünf Eigenperioden, die sich für einen Kanal mit dem Querschnitt von Abb.V.7 ergeben im Vergleich mit den Werten aus Tabelle V.1 für die mittlere Äquivalenztiefe von 20.0 m, die sich für eben diesen Querschnitt ergab.

Tabelle V.3 Vergleich der Ergebnisse bei konstanter Äquivalenztiefe mit Ergebnissen bei variabler Tiefenverteilung; $f=0$ bzw. $f=1.07_{40} \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$. Perioden in Stunden.

Ordnung	$h_e = \text{const}$		$H=H(y)$	
	$f=0$	$f \neq 0$	$f=0$	$f \neq 0$
1	4.342	4.195	4.241	4.104
2	2.171	2.152	2.183	2.164
3	1.447	1.441	1.474	1.468
4	1.085	1.083	1.116	1.114
5	0.868	0.867	0.903	0.902

Man sieht, daß die Ergebnisse sich etwas unterscheiden: die Eigenperiode der ersten Ordnung ist kleiner als die, die bei entsprechender mittlerer Äquivalenztiefe berechnet wird, aber

schon die Periode der 2.Ordnung ist größer als das ihr entsprechende Gegenstück. Es ist also so, daß - wie Simons (1980) es ausdrückt - die niederen Ordnungen die Tiefe unterhalb der mittleren Äquivalenztiefe spüren, während die höheren Ordnungen die flacheren Tiefen fühlen. Für diesen Vergleich wurden die Ergebnisse herangezogen, die sich mit dem in Abschnitt V.1.1 besprochenen Modell ergeben, bei dem die Kopplung zwischen barotroper und barokliner Bewegung noch voll berücksichtigt ist. Tabelle V.4 zeigt allerdings, daß die Unterschiede zu einem Modell, das diese beiden Bewegungsarten entkoppelt, äußerst gering sind. Damit kommt nochmals zum Ausdruck, daß die in Abschnitt V.1.2 vollzogene Separation im Fall des unendlich langen Kanals (also bei $H=H(y)$) in sehr guter Näherung möglich ist.

Tabelle V.4 Die Unterschiede zwischen dem entkoppelten und dem gekoppelten Zweischichten-Modell des Überlinger Sees als unendlich langer Kanal. Perioden in Sekunden; $f=0$ bzw. $f=1.07_{10}^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

Ordnung	$h_e = h_e(y)$		Zweischichten-Modell	
	$f=0$	$f \neq 0$	$f=0$	$f \neq 0$
1	15262	14771	15266	14774
2	7858	7789	7860	7790
3	5306	5285	5307	5286

V.3 Ein Vergleich mit Beobachtungen

In Abb.V.8 ist eine Zeitreihe der Strömungskomponente in Querrichtung bei der Meßstation So im Überlinger See (siehe Abb.V.6) gezeichnet. An diesem Beispiel einer internen Querschwingung des Überlinger Sees soll untersucht werden, ob es möglich ist, die Beobachtungsergebnisse durch die Modellrechnungen nachzuvollziehen. Diese Querschwingungen waren während der 1.Meßperiode der Bodensee-Expedition 1972 ein immer wieder zu beobachtendes Phänomen (siehe dazu Hollan (1974), S.166). Eine Analyse der Strömungsregistrierung in 6.0 m Tiefe bei So während des Zeitraums vom 4. bis 6. Oktober ergibt für die 1.Querschwingungsordnung eine Periode von 4.12

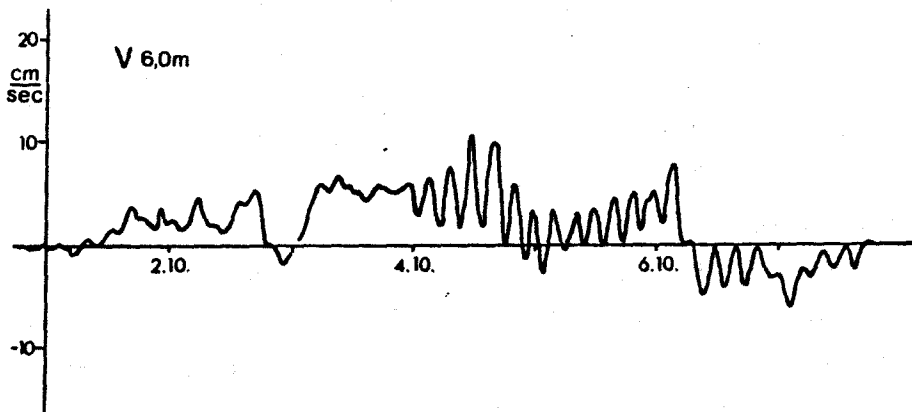


Abb.V.8 Querkomponente der Strömungsgeschwindigkeit in der Deckschicht bei So.

Stunden. Über die Temperaturregistrierungen im Bereich der Sprungschicht ergibt sich für die 2.Querschwingungsordnung eine Periode von 2.05 Stunden. (Durch die Positionierung der Meßstation So in der Mitte des Überlinger Sees ist die Strömungsregistrierung ohne Information über die 2.Querschwingungsordnung und die Temperaturregistrierung ohne Information über die 1.Ordnung). Eine Zusammenfassung von Ergebnissen des Abschnitts V.2 und eine Gegenüberstellung mit Beobachtungswerten ist in Tabelle V.5 durchgeführt.

Tabelle V.5 Ergebnisse der verschiedenen Modelle aus Abschnitt V.2 im Vergleich mit Beobachtungswerten bei So. Perioden in Stunden.

$h_e = 20m$	$h_e = 21m$	$h_e = 22m$	$H=H(y)$	Beobachtungen bei So
4.195	4.101	4.012	4.105	4.12
2.152	2.101	2.053	2.166	2.05

Unter den Vorbehalten der erwähnten Willkür bei der Wahl der Parameter ϵ , h_1 und B ließe sich eine gute Übereinstimmung der Modellrechnungen mit den Beobachtungswerten bei So feststellen. Betrachtet man weiterhin das Verhältnis von U/V , das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit in Längs- bzw. Querrichtung, so impliziert das Modell eines unendlich langen Kanals ein Verhältnis $U/V = 1/4$ entsprechend f/ω . In Abb.V.9 ist ein Ausschnitt der Beobachtungsreihe (siehe Abb.V.8) aufgezeigt, bei dem die Quer- bzw. Längskomponente der Strömung

bereinigt wurde von windbedingten Anteilen. Es ist zwar die Phasenverschiebung von 90° zwischen Quer- und Längskomponente zu ersehen, aber man erkennt auch, daß sich die gemessenen Werte nicht in dem Maße (wie 1 zu 4) voneinander unterscheiden,

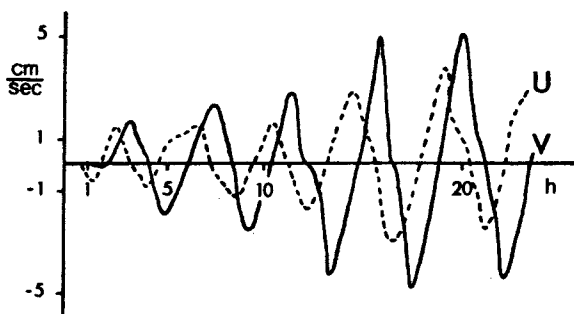
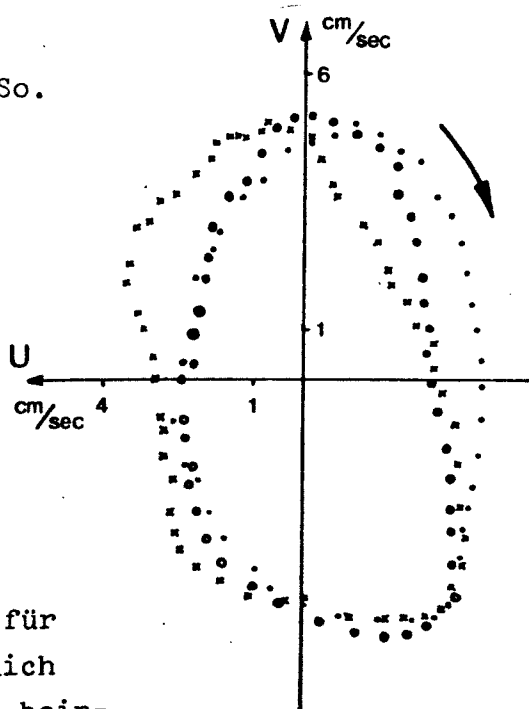


Abb.V.9 Hochpassgefilterte Quer- bzw. Längskomponente der Strömung in 6.0 m Tiefe bei So.

wie dies vom Modell eines unendlich langen Kanals gefordert wird. Dies wird durch Abb.V.10 verdeutlicht, wo die Stromellipsen für drei Perioden konstruiert sind.

Abb.V.10 Stromellipsen bei So.



Die Gültigkeit eines Modells für den Überlinger See als unendlich langer Kanal würde allerdings beinhalten, daß bei S1 (siehe Abb.V.6) kein Unterschied zu den für So berechneten Ergebnissen auftritt. Die Meßergebnisse bei S1 lassen sich nicht damit in Einklang bringen (siehe dazu Abschnitt V.3).

V.4 Die internen Querschwingungen des Überlinger Sees bei Berücksichtigung von Effekten, die vom Ende des Sees ausgehen

Die eben erwähnten Unstimmigkeiten zwischen den Ergebnissen des Kanal-Modells und den Beobachtungsergebnissen der Bodensee-Expedition 1972, lassen es angebracht erscheinen, von den Vereinfachungen eines unendlich langen Kanals abzugehen, das heißt, Veränderlichkeiten in Längsrichtung in Betracht zu ziehen. Dies beinhaltet eine realistische Erfassung der Uferlinie und der Bodentopographie auch in Längsrichtung und insbesondere die Berücksichtigung des abschließenden Randes am Ende des Überlinger Sees. Abb.V.11 zeigt, wie weit mit einem Gitter mit 250 m Gitterweite die Approximation der Uferlinie möglich ist.

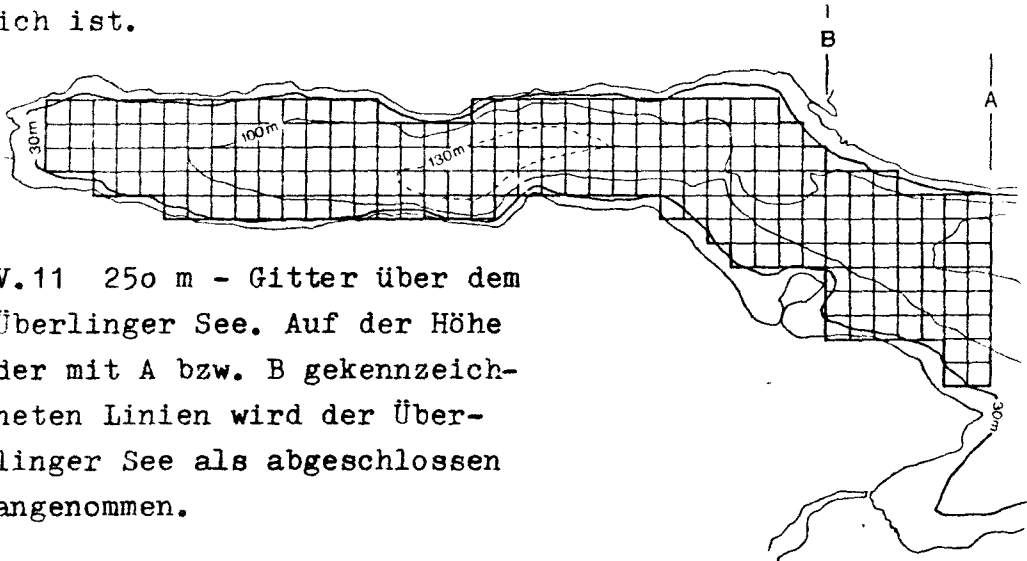


Abb.V.11 250 m - Gitter über dem Überlinger See. Auf der Höhe der mit A bzw. B gekennzeichneten Linien wird der Überlinger See als abgeschlossen angenommen.

Nicht unmittelbar erfaßt werden kann der Einfluß der Wassermassen des größeren Teiles des Bodensees ostwärts der Öffnung des Überlinger Sees, des eigentlichen Obersees, auf die Querschwingungen des Überlinger Sees, da dort die Anzahl der Gitterpunkte in Querrichtung bei einem derart engen Abstand der Gitterpunkte und die damit verbundene Dimension der Matrizen über die Möglichkeiten des Rechners hinausführen würde.

Die im folgenden dargelegten Ergebnisse von Berechnungen der Querschwingungen eines "Überlinger Sees", der - mehr oder weniger willkürlich festgelegt - als abgeschlossen angesehen wird, zeigen allerdings, daß die Querschwingungen des Überlinger Sees nur wenig beeinflusst werden von den angrenzenden Wassermassen des eigentlichen Obersees. Um abschätzen

zu können, inwieweit die Querschwingungen des Überlinger Sees als lokaler Prozeß angesehen werden können, wird der Abschluß des Modellbeckens an verschiedenen Stellen (in Abb.V.11 gekennzeichnet mit A bzw. B) angebracht. Für den Frequenzbereich, in dem aufgrund der vorhergehenden Berechnungen des Kanal-Modells die 1.Querschwingungsordnung vermutet wird, ergibt sich (abgesehen von den vielen unrealistischen, durch den Abschluß herbeigeführten Längsschwingungen des Modellbeckens) eine Querschwingung, deren Eigenperiode der Tabelle V.5 zu entnehmen ist.

Tabelle V.5 Eigenperioden (in Stunden) der internen Querschwingungen 1.Ordnung bei verschiedenen Abschlüssen des Überlinger Sees (siehe dazu Abb.V.12).

abschließende Linie	A	B
Eigenperiode (h)	3.952	3.931

Aussagekräftiger als diese weitgehend übereinstimmenden Eigenperioden ist der Vergleich der Strukturen der dazu gehörigen Eigenvektoren, von denen in Abb.V.12 die jeweiligen Auslenkungen der Grenzfläche zum Zeitpunkt der maximalen Auslenkung aufgezeigt sind.

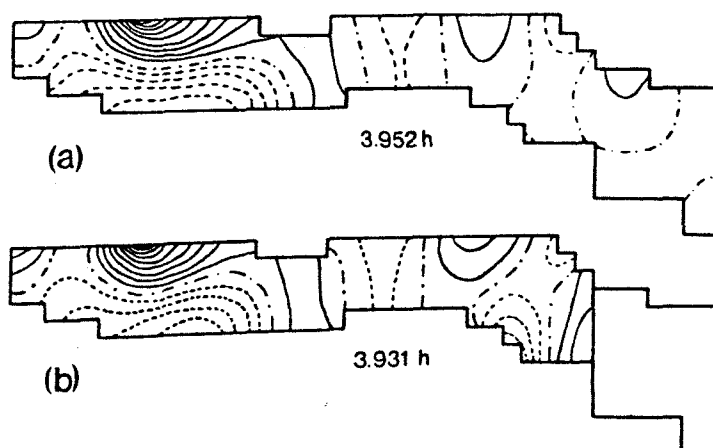


Abb.V.12 Auslenkung der Grenzfläche zum Zeitpunkt der maximalen Auslenkung; (a) für den Fall des Abschlusses des Überlinger Sees bei A, (b) für den Fall des Abschlusses bei B.

Man erkennt, daß die Querschwingung 1.Ordnung des Überlinger Sees ein Phänomen ist, das sich mit seinen wesentlichen Signalen auf das Ende des Überlinger Sees beschränkt. In Abb.V.13 sind die Stromellipsen der zu Abb.12b gehörigen Eigenfunktion über dem westlichen Teil des Überlinger Sees gezeichnet. Wie schon in den Abb.V.12a,b ist auch hier die lediglich lokale Bedeutung der internen Querschwingung 1.Ordnung zu erkennen.

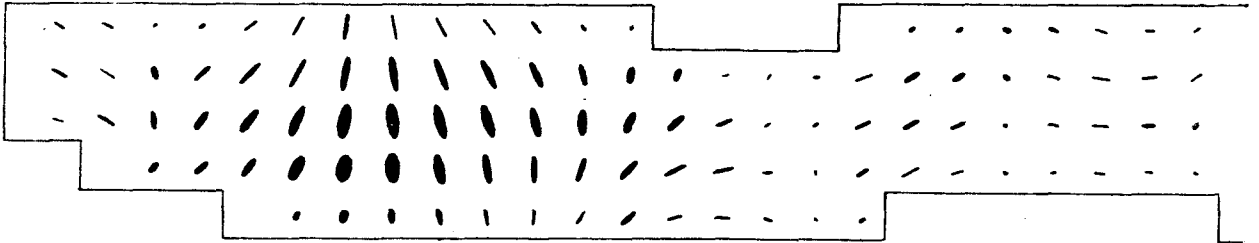


Abb.V.13 Stromellipsen im westlichen Teil des Überlinger Sees.

Dieses Ergebnis steht in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung, daß in den Strömungsregistrierungen der Station S1 (siehe Abb.V.6) bei weitem kein so deutliches Signal der Querschwingung 1.Ordnung auszumachen ist wie bei So (siehe dazu auch Hollan (1974), S.166). Das bedeutet für die Modellierung dieses Phänomens, daß man den Abschluß des Überlinger Sees ohne Verlust an Information schon bei Linie B in Abb.V.13 machen kann. Dies eröffnet die Möglichkeit, bei vertretbarem Rechenzeitaufwand ein noch feineres Gitter über diesen verbleibenden Teil des Überlinger Sees zu legen, um damit eine verbesserte Bestimmung der Eigenfrequenzen und der Struktur der Eigenfunktion der internen Querschwingung 1.Ordnung zu bekommen und genauere Aussagen über die 2.Querschwingungsordnung machen zu können (letzteres ist bei dem 250 m - Gitter nur spekulativ möglich).

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Die Eigenschwingungen eines zweigeschichteten rechteckigen (5x1)-Beckens wurden von Rao (1977) für den Fall ebenen Bodens berechnet. Dabei macht er Gebrauch von der Möglichkeit der Entkopplung von barotroper und barokliner Bewegung, die bei ebenem Boden exakt möglich ist und auf ein Gleichungssystem für die barokline Eigenschwingung führt, das äquivalent den Gleichungen eines barotropen Einschichten-Modells ist.

Mit dem hier vorgestellten Verfahren ist es möglich, die vollständigen (gekoppelten) Gleichungen eines Zweischichten-Modells bei variabler Tiefe der Unterschicht zu lösen. Es wird gezeigt, daß bei unebenem Boden der relative Fehler, der gemacht wird, wenn man dem Äquivalenztiefen-Modell die aus der mittleren Tiefe abgeleitete (konstante) Äquivalenztiefe zugrunde legt, größer ist als der Fehler, der entsteht, wenn man - formal nicht exakt - die Punkt für Punkt berechnete Äquivalenztiefe benutzt.

Am Beispiel des Bodensees werden Berechnungen über Eigenschwingungen eines natürlichen Wasserbeckens angestellt. Der Einfluß der Erdrotation auf die Oberflächen-Seiches des Bodensees erweist sich als verschwindend klein. Die Untersuchungen über das prinzipielle Verhalten der internen Eigenschwingungen des zweigeschichteten Bodensees gegenüber einer Steigerung der Rotationsgeschwindigkeit zeigen, wie sich die Struktur der einzelnen Schwingungsordnungen mit größer werden dem Coriolisparameter ändert. Dabei hat es den Anschein, als ob für natürliche Becken ein System von positiven Amphidromien den stabilen Endzustand jeder Schwingungsordnung darstellt. Für den Bodensee ist es die 11. Schwingungsordnung, die als niederste Ordnung bei dem in Wirklichkeit gegebenen Coriolisparameter eine rechtsdrehende (negative) Amphidromie aufweist.

Die internen Querschwingungen des Überlinger Sees kann man mit einer ganzen Reihe von (mehr oder weniger stark vereinfachenden) Modellen zu interpretieren versuchen. Die Rechnungen, die den Überlinger See als unendlich langen Kanal mit ebenem Boden behandeln (und analytisch durchführbar sind), ermöglichen zwar die Bestimmung der Eigenfrequenzen, doch die

Struktur der internen Eigenschwingungen ist erst mit dem vollständigen Modell, bei dem die Veränderlichkeit der Randkonfiguration und der Bodentopographie in Längsrichtung berücksichtigt werden kann, zu ermitteln.

Die bis hierher vorgestellten Berechnungen von Eigenschwingungen abgeschlossener Becken wurden für konstanten Coriolisparameter ($f=f_0=\text{const}$) durchgeführt. Will man Effekte berücksichtigen, die durch die Krümmung der Erdoberfläche entstehen, so kann man dies erreichen, indem man den Coriolisparameter f als veränderlich in y -Richtung annimmt ($f=f_0+\beta y$). Sieht man den β -Term als konstant an, so ändern die Ausgangsgleichungen der vorliegenden Rechnungen (I.13) ihre Form nur insofern, als der konstante Coriolisparameter $f=f_0$ ersetzt wird durch $f=f_0+\beta_0 y$. So lauten die Gleichungen für ein barotropes Einschichten-Modell

$$i\omega \mathbf{V} + f \mathbf{k} \times \mathbf{V} + g h \nabla \zeta = 0 \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$i\omega \zeta + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Im Fall kinematischer Divergenzfreiheit ändert sich die Kontinuitätsgleichung (A.2) zu

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad . \quad (\text{A.2a})$$

Die Approximationen, die in diese Gleichungen (mit $f=f_0+\beta_0 y$) eingehen, werden bei Rhines (1969) diskutiert. Gleichung (A.2a) erlaubt die Einführung einer Transportfunktion Ψ , derart daß $\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla \Psi$ ist. Bildet man die Rotation von (A.1), so erhält man die Vorticity-Gleichung

$$i\omega \nabla \cdot \left(\frac{1}{h} \nabla \Psi \right) + \nabla \left(\frac{f}{h} \right) \cdot \mathbf{k} \times \nabla \Psi = 0 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Außer in der Nähe des Äquators sind die Effekte, die durch variable Wassertiefe hervorgerufen werden, im 2.Term der Gleichung (A.3) bedeutend wichtiger als im 1.Term. Daraus ersieht man unmittelbar die dynamische Äquivalenz, die zwischen der Variation des Coriolisparameters mit der Breite (dem β -Effekt)

und Variationen der Bodentopographie bei konstantem f besteht. Das bedeutet z.B., daß Ergebnisse, die auf der β -Ebene gewonnen werden, ohne weiteres übertragen werden können auf Fälle mit

konstantem f , denen ein linearer Gradient der Wassertiefe in y -Richtung zugrunde liegt. Damit ist einleuchtend, daß eine Anwendung des in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Verfahrens zur Lösung der primitiven Gleichungen (I.13) auf Vorgänge auf der β -Ebene möglich ist. Die Bildfolge A.1a - A.1d, die in zeitlicher Abfolge von Achteln der Periode die Strömungsverteilung der 1. Eigenschwungsordnung eines (2×1) -Rechtecks auf der β -Ebene zeigt, ließe sich also einem bestimmten Fall einer Eigenschwingung eines (2×1) -Beckens mit in Querrichtung geneigtem Boden auf der f -Ebene zuordnen.

Untersuchungen über den Einfluß eines "mittelatlantischen Rückens" auf die Eigenschwingungen (basin modes) eines Beckens mit den Dimensionen des Nordatlantiks werden zur Zeit durchgeführt und beweisen die Brauchbarkeit des vorgestellten Verfahrens bei derartigen Problemen.

Ein Blick auf die Gleichungen, die für Wellen in einer dünnen Wasserschicht auf der Oberfläche einer Kugel gelten (siehe z.B. Krauss (1973), S.156), zeigt, daß

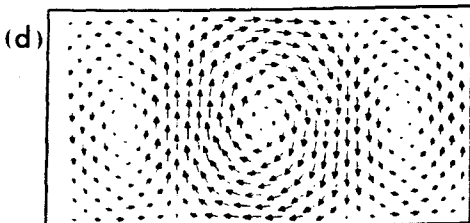
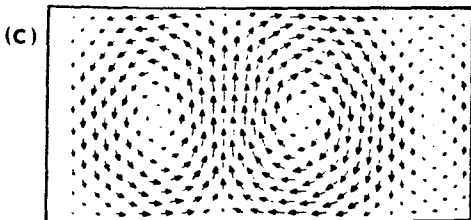
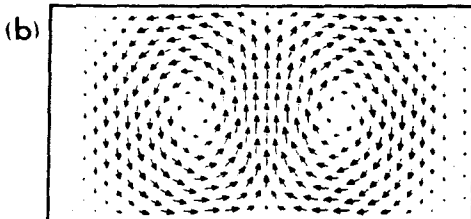
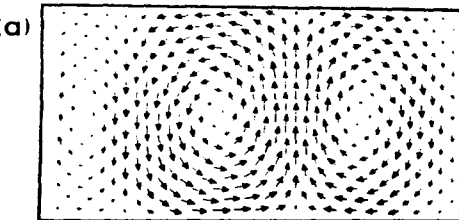


Abb.A.1 Strömungsverteilung der 1.Eigenschwungsordnung eines (2×1) -Rechtecks auf der β -Ebene, jeweils um $1/8$ der Periode zeitversetzt,

die Struktur der Koeffizientenmatrix des Systems der Differenzgleichungen des Eigenwertproblems sich für den Fall sphärischer Koordinaten nicht ändert, lediglich einige weitere Koeff-

fizienten müssen von Gitterpunkt zu Gitterpunkt als veränderlich angesehen werden.

So läßt sich zusammenfassend sagen, daß in der vorliegenden Arbeit ein mathematisch äußerst einfaches Verfahren vorgestellt wird, das es ermöglicht, die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren von abgeschlossenen, mehrfach geschichteten Wasserbecken mit beliebiger Berandung und variabler Tiefe der untersten Schicht zu bestimmen. Die horizontalen Abmessungen des Wasserbeckens können die eines Sees (f -Ebene) oder die von Randmeeren oder Teilen des Ozeans (β -Ebene oder Kugeloberfläche) sein. Das Hauptaugenmerk der hier dargestellten Berechnungen liegt auf den Eigenschwingungen zweigeschichteter Seen, insbesondere des Bodensees bzw. des Überlinger Sees.

DANKSAGUNG

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. W. Krauss, möchte ich meinen Dank aussprechen für die Langmut und sein mir entgegen gebrachtes Vertrauen, die mir die Freiheit gaben, die Entwicklung und Anwendung des Verfahrens mit dem für mich notwendigen zeitlichen Aufwand zu Ende zu bringen.

Meinen Kollegen Silke Struve, Chresten Wübber und Jürgen Kielmann will ich danken für manche fruchtbare Diskussion und ihre oftmalige Bereitschaft, sich meine Probleme und Freuden anzuhören.

Ohne Eckard Hollan, der das Bodensee-Projekt 1972 geleitet hat und jetzt an vorderster Front für eine stärkere Beachtung physikalischer Aspekte bei der Erforschung des Bodensees kämpft, hätte ich nicht die Hoffnung, daß meine Untersuchungen über den Bodensee praktische Bedeutung erlangen könnten.

Schließlich sei auch an dieser Stelle Chrischi und Philip meine Dankbarkeit dafür ausgedrückt, daß ich trotz meiner oftmaligen abendlichen und nächtlichen Sitzungen am Computer immer ihrer Liebe gewiß sein durfte.

LITERATURVERZEICHNIS

- CHARNEY, J.G., 1955: Generation of oceanic currents by winds. J. Mar. Res. 14, 477-498
- CSANADY, G.T., 1971: Baroclinic boundary currents and long edge-waves in basins with sloping shores. J. Phys. Oceanogr. 1, 92-104
- DEFANT, A., 1960: Physical oceanography. Vol. II. Pergamon Press, London, 598 pp.
- DEFANT, F., 1954: Theorie der Seiches des Michigansees und ihre Abwandlung durch Wirkung der Corioliskraft. Arch. Met. Geophys. Biokl. 6, 218-241
- FOREL, F.A., 1893: Die Schwankungen des Bodensees. Schr. d. Vereins f. Gesch. d. Bodensees, 22, 49-77
- HAMBLIN, P.F., 1978: Internal Kelvin waves in a fjord lake. J. Geophys. Res. 83, 2409-2418
- HAMBLIN, P.F. and E. HOLLAN, 1978: On the gravitational seiches of Lake Constance and their generation. Schweiz. Z. Hydrol. 40, 119-154
- HOLLAN, E., 1974: Strömungsmessungen im Bodensee. Sechster Bericht der AWBR, 109-187
- HOLLAN, E., RAO, D.B. and E. BAUERLE, 1980: Free surface oscillations in Lake Constance with an interpretation of the "Wonder of the rising water" at Konstanz in 1549. Arch. Met. Geoph. Biokl., Ser. A, 29, 301-325
- KANARI, S., 1975: The long-period internal waves in Lake Biwa. Limnol. Oceanogr. 20, 544-553
- KRAUSS, W., 1973: Methoden und Ergebnisse der Theoretischen Ozeanographie, Vol. 1, Gebrüder Borntraeger, Berlin
- LeBLOND, P.H. and L.A. MYSAK, 1978: Waves in the Ocean. Elsevier Oceanography Series
- MORTIMER, C.H., 1953: The resonant response of stratified lakes to wind. Schweiz. Z. Hydrol. 15, 94-151
- MORTIMER, C.H., 1974: Lake hydrodynamics. Mitt. Int. Ver. Theor. Angew. Limnol. 20, 124-197
- MUHLEISEN, R. and W. KURTH, 1978: Experimental investigations on the seiches of Lake Constance. Schweiz. Z. Hydrol. 40, 155-168
- MURTHY, C.R., 1972: Complex diffusion processes in coastal currents of a lake. J. Phys. Oceanogr. 2, 80-90

- PLATZMAN, G.W., 1958: The lattice structure of the finite-difference primitive and vorticity equations. *Monthl. Wea. Rev.* 86, 285-292
- PLATZMAN, G.W. and D.B. RAO, 1964: The free oscillations of Lake Erie. In: *Studies on Oceanography*. 359-382
- PROUDMAN, J., 1916: On the dynamical equations of the tides. *Proc. London Math. Soc.*, 2nd Ser., 18, 1-68
- RAO, D.B., 1966: Free gravitational oscillations in rotating rectangular basins. *J. Fluid Mech.* 25, 523-555
- RAO, D.B. and D.J. SCHWAB, 1976: Two-dimensional normal modes in arbitrary enclosed basins on a rotating earth: application to Lakes Ontario and Superior. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 281, 63-96
- RAO, D.B., 1977: Free internal oscillations in a narrow, rotating basin, p. 391-398. In: T.S. Murty (Ed.) - *Modeling of transport mechanisms in oceans and lakes*. *Proc. Symp. CCIW, Burlington, Ontario*.
- RHINES, P.B. 1969: Slow oscillations in an ocean of varying depth. *J. Fluid Mech.* 37, 161-169
- SCHECHTER, S., 1960: Quasi-tridiagonal matrices and type-insensitive difference equations. *Quart. App. Math.* 3, 285-295
- SCHULTHAISS, C., 1549: Wunder anloffen des wassers. *Collectaneen*, Vol. VI, 80-81
- SCHWAB, D.J., 1977: Internal free oscillations in Lake Ontario. *Limnol. Oceanogr.* 22, 700-708
- SELENKA, F. und R. RUSCHKE, 1965: Keimzahlen und Fäkalindikatoren im Bodenseewasser. *Arch. Hyg.*
- SIMONS, T.J., 1972: Development of numerical models of Lake Ontario. Part 2. *Proce. Conf. Great Lakes Res., IAGLR*, 15, 655-672
- SIMONS, T.J., 1980: Circulation models of lakes and inland seas. *Can. Bull. Fish. Aquat. SCI.* 203, 146 p.
- WANG, D.P. and C.K. MOOERS, 1976: Coastal trapped waves in a continuously stratified ocean. *J. Phys. Oceanogr.* 6 (6)- 843-863